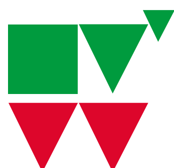
EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

NR.5



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 91 | MAART 2016

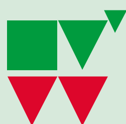
INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 91 NR 5

IN DIT NUMMER

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

Kort vooraf



VERSCHILLEN TUSSEN REKENTOETS EN CENTRAAL EXAMEN WISKUNDE

Franziska van Dalen
Paul Drijvers
Hendrik Straat

De rekentoets staat sterk in de belangstelling. In 2014 adviseerde de commissie Bosker om de discrepantie te onderzoeken tussen de resultaten op wiskunde-examens en op de rekentoets 2F voor leerlingen in vmbo bb en vmbo kb. In het voorjaar van 2015 is dit onderzoek door Cito uitgevoerd; Franziska van Dalen, Paul Drijvers en Hendrik Straat vatten de belangrijkste resultaten samen.

Inleiding

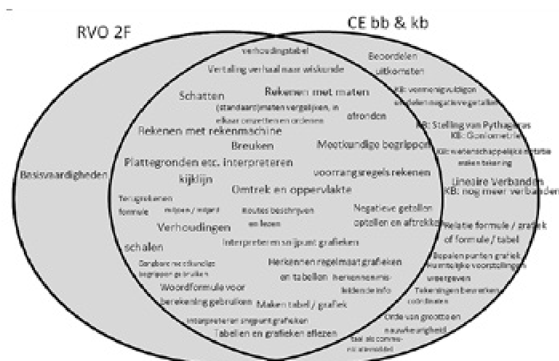
De resultaten van leerlingen op de rekentoets vo waren de afgelopen jaren lager dan die van de eindexamens wiskunde, terwijl met name de examens wiskunde vmbo ook veel rekenonderdelen bevatten. Dit was aanleiding voor de commissie Bosker[1] om te adviseren de discrepantie tussen de resultaten op wiskunde-examens en op de rekentoets 2F voor leerlingen in vmbo bb en vmbo kb nader te onderzoeken. Omdat de resultaten van dit onderzoek, dat inmiddels is uitgevoerd en gepubliceerd[2], interessant zijn voor wiskundeleraren, vatten we ze in dit artikel kort samen.

We beperken ons tot het vmbo bb en vmbo kb en onderzoeken de resultaten van deze leerlingen op de rekentoets 2F en het digitaal afgenomen centraal examen (CE) wiskunde. Immers, rekenen en wiskunde staan in deze schooltypen dicht bij elkaar en digitale toetsen zijn beter vergelijkbaar dan toetsen waarin verschillende media worden gebruikt. We bekijken de jaren 2013, 2014 en 2015, waardoor de resultaten van in totaal ruim 47.000 leerlingen in dit onderzoek zijn betrokken.

Verschillende toetsen?

De eerste vraag is in hoeverre de rekentoets en het CE wiskunde vmbo bb en vmbo kb van elkaar verschillen.

figuur 1 Overeenkomsten en verschillen tussen de rekentoetswijzer en de syllabi CE



Inhoudelijk blijkt uit een analyse van de rekentoetswijzer en de syllabus van het examen dat er behoorlijk veel overlap bestaat tussen rekenen en wiskunde in het vmbo. In figuur 1 is deze overlap in kaart gebracht. De toetsen, dus de rekentoets en het centraal examen, zijn wel behoorlijk verschillend: de examens bevatten meer vragen bij eenzelfde context (*clustervragen*) terwijl de rekentoets in het algemeen één vraag per context stelt (al wordt sinds 2015 per toets één cluster met drie vragen bij dezelfde context opgenomen). Bij de rekentoets zijn items helemaal goed of helemaal fout, terwijl je bij het examen ook deelscores kunt halen. De rekentoets kent contextloze opgaven, die we in examens niet terugvinden en het aantal vragen in de rekentoets is veel groter dan het aantal vragen op het examen.

Als we ons beperken tot vragen die zowel op de rekentoets als op het examen gesteld hadden kunnen worden (en dus contextloze opgaven uitsluiten omdat die op het CE niet worden gesteld) dan is de eerste opvallende bevinding dat de rekenvragen van de rekentoets inhoudelijk complexer zijn dan die van het examen, met name voor bb. De inhoudelijke complexiteit is geoperationaliseerd door een systematiek te ontwikkelen om de complexiteit van een vraag uit te drukken in het aantal benodigde denk- en rekenstappen. In figuur 2 staan twee voorbeelden van opgaven met de bijbehorende complexiteit. Het algemene beeld na het coderen (en controleren en hercoderen...) van 745 vragen van beide toetsen is dat de gemiddelde complexiteit van de vragen van de rekentoets gelijk is aan 3,2 rekenstappen en die van de CE's wiskunde bb en kb aan 2,7 rekenstappen. Uit significantietoetsen (*t*-toetsen) blijkt dat het aantal benodigde rekenstappen van de contextvragen van de rekentoets in 2013, 2014 en 2015 significant hoger ligt dan het aantal benodigde rekenstappen van de rekenvragen van het CE wiskunde vmbo bb en kb met als uitzondering vmbo kb in 2014 en 2015. De rekentoetsvragen zijn dus inhoudelijk complexer dan de rekenonderdelen van de CE's, met name bij vmbo bb. De tweede opvallende indruk betreft de taligheid van de items, een punt waarop de rekentoets vaak wordt bekritiseerd. Een analyse van bescheiden

Preview Toets
bb-wi-13
Vraag 10 van 23

Blokhut

3 m 3 m

Onder de tegelvloer wil Brenda plastic leggen. Dit plastic moet aan alle kanten 5 cm onder de tegelvloer uitsteken.

tegelvloer 3 m 3 m 5 cm 5 cm

(3p) Bereken hoeveel m² plastic Brenda minstens nodig heeft.
Typ je berekening in.

figuur 2 De complexiteit van twee items van rekentoets en centraal examen.

Preview Toets 1 punt
RVO-2F-13 Vraag 3 van 61

Kranenbrug

Woensdag, 28 november 2012

In 2013 veel deelnemers aan

Er worden in 2013 veel hardlopers verwacht bij de marathon van Kranenburg. Het aantal lopers zal minimaal anderhalf keer zo groot zijn als dit jaar.

In 2012 deden 1520 hardlopers mee aan deze marathon.

Hoeveel hardlopers worden in 2013 minimaal verwacht?

hardlopers

figuur 2a Dit item uit het CE wiskunde vmbo bb van 2013 kan in vier stappen opgelost worden. Stap 1: Omzetten, 5 cm omzetten naar 0,05 m. Stap 2: Vermenigvuldigen, 0,05 m met 2 vermenigvuldigen omdat het er aan beide kanten bij moet. Stap 3: Optellen, 0,10 m bij 3 m optellen om de afmetingen van het vierkante stuk plastic te bepalen. Stap 4: Vermenigvuldigen, 3,1 m met 3,1 m vermenigvuldigen om de oppervlakte te berekenen.

figuur 2b Dit item uit de rekentoets 2013 kan in drie stappen opgelost worden. Stap 1: Bron, er staan overbodige getallen zoals de datum van het krantenartikel in het plaatje. Stap 2: Omzetten term, anderhalf moet omgezet worden naar 1,5. Stap 3: Vermenigvuldigen, 1,5 vermenigvuldigen met 1520.

omvang door een taaldeskundige suggereert dat het CE wiskunde vmbo bb 2013 qua taligheid complexer is dan de rekentoets tijdvak 1 2013. Dat de rekentoets te talig zou zijn, wordt hiermee dus ontkracht, al zou een grootschaliger onderzoek op dit punt (zie bijvoorbeeld [5]) nodig zijn om uitspraken met meer zekerheid te kunnen doen.

Verschillende resultaten?

De volgende vraag is of er significante verschillen zijn tussen de resultaten van kandidaten op de rekentoets en het CE wiskunde vmbo bb en vmbo kb. Allereerst is er gekeken naar de samenhang tussen de scores op de CE's wiskunde vmbo en de scores op de rekentoets. De correlatiecoëfficiënten tussen het CE wiskunde bb 2013 en 2014 en de rekentoets zijn respectievelijk 0,75 en 0,68. Voor kb 2013 en 2014 zijn deze waarden 0,65 en 0,53.

Er is dus een behoorlijke samenhang tussen deze resultaten, die voor bb sterker is dan voor kb. Om de vraag naar de verschillen te beantwoorden zijn scores geanalyseerd van leerlingen vmbo bb en kb die in een van de afnamejaren 2013, 2014 of 2015 aan zowel de rekentoets als aan het CE wiskunde hebben meegedaan. In totaal gaat het om ruim 47.000 leerlingen. In het onderzoek zijn enkel de scores meegenomen op vragen die in beide toetsen hadden kunnen voorkomen; er is dus op item- of vraagniveau gekeken en niet naar de scores op de toetsen als geheel. Om de scores te kunnen vergelijken zijn de vmbo opgaven, waarvoor je meestal meer punten kunt halen, omgeschaald naar 0 en 1: 1 punt als de opgave helemaal goed is en anders 0, net zoals bij de rekentoets het geval is. Met t-toetsen is vervolgens bepaald of de behaalde scores van kandidaten op de rekentoets en het

Leerwegsector en afnamejaar	M_{RVO} (SD_{RVO})	M_{CE} (SD_{CE})	N	Significantie	Cohen's d
Vmbo bb 2013	.294 (.147)	.533 (.171)	5426	.000	1.50
Vmbo kb 2013	.445 (.169)	.576 (.195)	6981	.000	0.72
Vmbo bb 2014	.354 (.151)	.504 (.178)	9764	.000	1.19
Vmbo kb 2014	.467 (.158)	.488 (.210)	13038	.000	0.11
Vmbo bb 2015	.419 (.163)	.567 (.173)	5534	.000	0.88
Vmbo kb 2015	.575 (.158)	.672 (.178)	6453	.000	0.58

figuur 3 Scores rekenopgaven CE wiskunde vergeleken met scores contextitems rekentoets

Leerwegsector en afnamejaar	Rekentoets	CE wiskunde
Vmbo bb 2013	25,8%	80,1%
Vmbo kb 2013	25,3%	65,9%
Vmbo bb 2014	29,9%	83,6%
Vmbo kb 2014	27,9%	68,9%
Vmbo bb 2015	40,7%	82,0%
Vmbo kb 2015	50,7%	76,6%

figuur 4 Percentage voldoende per toets/examen en schooltype in tijdvak 1

CE wiskunde vmbo bb of kb significant verschillen. De resultaten van deze exercitie vindt u in de tabel van figuur 3. In de eerste kolom staan leerweg en afnamejaar. In de tweede kolom staat de gemiddelde score. Het getal .294 betekent bijvoorbeeld dat de vmbo bb leerlingen in 2013 bij de rekentoets ruim 29% van de contextopgaven correct hebben beantwoord. Tussen haakjes staat daarachter de bijbehorende standaarddeviatie. In de derde kolom staan vergelijkbare gegevens, maar dan voor de rekenvragen van het centraal examen. Kolom 4 bevat de aantallen leerlingen. In kolom 5 staat of het verschil tussen beide gemiddeldes significant is. De laatste kolom geeft de effectgrootte van het verschil. Dit is de grootte van het verschil uitgedrukt in de gezamenlijke standaardafwijking. De effectgrootte is dus een maat voor het effect die niet afhangt van de spreiding van de gegevens. Dus 1.50 geeft aan dat het gemiddelde verschil anderhalve standaardafwijking is. Ter vergelijking, in de sociale wetenschappen wordt doorgaans vanaf een effectgrootte van 0.8 gesproken van een groot effect.
Uit de tabel blijkt dat voor alle zes groepen leerlingen geldt dat het resultaat op de rekentoets significant lager is dan dat van het centraal examen. In deze zin kunnen we dus inderdaad van een discrepantie spreken. De effectgroottes zijn redelijk tot groot te noemen, met uitzondering van vmbo kb 2014. In het algemeen zijn de effectgroottes voor bb hoger dan die voor kb. Wel nemen deze effectgroottes voor bb in de loop van de tijd af, wat zou kunnen betekenen dat de scores op de rekentoets en het CE naar elkaar toe groeien. Samengevat kunnen we dus concluderen dat de scores voor de rekentoets significant lager zijn dan voor het CE wiskunde en dat dit met name voor vmbo bb het geval is, al lijken de verschillen kleiner te worden.

'DUIDELIJK DAT HET MOEILIJKER IS OM EEN VOLDOENDE VOOR DE REKENTOETS TE HALEN.'

Verklarende factoren?

De derde en laatste vraag is hoe we de geconstateerde verschillen tussen de resultaten kunnen verklaren. Factoren die hierbij mogelijk een rol spelen zijn het feit dat de leerlingen op de rekentoets geen en op het CE wel deelscores kunnen behalen en het feit dat het CE wel en de rekentoets geen clustervragen bevatten. Uit ander onderzoek blijkt dat deze factoren vermoedelijk geen grote rol spelen.[3, 4] Evenmin lijkt de taligheid een verklaring te bieden, want de indruk is dat de rekentoets juist minder talig is dan het CE. Wat natuurlijk wel een verklaring kan zijn, is de hogere rekencomplexiteit die we hebben geconstateerd bij de rekentoets in vergelijking met het CE: voor de vragen van de rekentoets waren immers gemiddeld meer rekenstappen nodig dan voor de CE-rekenvragen. Maar er is nog iets meer aan de hand. Een aantal paren van rekenvragen uit de rekentoets en CE is op twee verschillende manieren met elkaar vergeleken. Ten eerste is een aantal paren onderzocht dat dezelfde rekencomplexiteit had. Daarbij bleek dat leerlingen de betreffende items van het CE significant beter maakten dan de qua complexiteit dus vergelijkbare vragen van de rekentoets. Ten tweede is een aantal paren van vragen afkomstig uit de rekentoets en het CE onderzocht die in praktijk even goed zijn gemaakt door de leerlingen. Vervolgens zijn deze paren aan experts voorgelegd met de vraag welke zij het meest complex vonden. De uitkomst hiervan was dat men significant vaker de CE-opgave als de meest complexe aanwees. Informeel geformuleerd: vragen die inhoudelijk even moeilijk lijken, worden op de rekentoets slechter gemaakt dan op het CE. Andersom, van opgaven die even goed gemaakt worden, worden die van het CE als inhoudelijk moeilijker ingeschat. Dit suggereert dat leerlingen beter presteren op het CE dan op de reken-

toets. Mogelijke verklaringen hiervoor zouden kunnen zijn dat men voor het CE beter is gemotiveerd dan voor de rekentoets, of dat de leerlingen er beter op zijn voorbereid. Een derde mogelijke verklaring voor het verschil in resultaten is de manier van cesuurbepaling. Die van de rekentoets is gebaseerd op de referentieniveaus rekenen, terwijl de normering van het CE plaatsvindt op basis van een referentie-examen. In figuur 4 staan de percentages voldoende per toets/examen en schooltype. We zien dat deze percentages sterk verschillen. Het verschil in complexiteit gecombineerd met het verschil in percentages voldoende maakt duidelijk dat het moeilijker is om een voldoende voor de rekentoets te halen dan voor het CE wiskunde. De cesuur ligt voor de rekentoets hoger dan voor het CE wiskunde.

Conclusie

In dit artikel zijn we nagegaan in hoeverre de resultaten op de rekentoets verschillen van die van het centraal examen wiskunde voor vmbo en waarom dat zo zou kunnen zijn. De eerste conclusie is dat er grote inhoudelijke overlap bestaat maar dat er ook grote verschillen bestaan in de wijze van toetsen. De tweede conclusie is dat de leerlingen vmbo bb en kb inderdaad significant hoger scoren voor het CE wiskunde dan voor de rekentoets en dat met name bij vmbo-bb er sprake is van behoorlijke effectgroottes, al lijken die in de loop van de jaren af te nemen. De belangrijkste mogelijke verklaringen voor deze verschillen zijn (1) de hogere rekencomplexiteit van de items van de rekentoets in vergelijking met die van de rekenvragen in het CE, (2) de lagere prestaties van leerlingen op de rekentoets door lagere motivatie of slechtere voorbereiding, en (3) de cesuur die vanuit een ander referentiekader is opgesteld. Andere factoren zoals taligheid van rekenvragen, het al dan niet toekennen van deelscores en het gebruik van clustervragen lijken niet van doorslaggevend belang te zijn.

Noten

[1] Bosker, R., & Vorle, R. Van de (Red.) (2014). *Advies over de uitwerking van de referentieniveaus 2F en 3F voor rekenen in toetsen en examens.* Enschede: SLO.

[2] Cito (2015). Onderzoek Discrepantie Rekentoets vo 2F en CE wiskunde vmbo bb en kb. Eindrapportage juni 2015. Arnhem: Stichting Cito. *www.hetcvte.nl/item/overige_publicaties*

[3] Cito (2015). De mogelijkheden en consequenties van het werken met deelscores Eindrapport, mei 2015. Arnhem: Stichting Cito. *www.hetcvte.nl/item/overige_publicaties*

[4] Cito (2015). Clustervragen in rekentoetsen en -examens Eindrapport, september 2015. Arnhem: Stichting Cito. *www.hetcvte.nl/item/overige_publicaties*

[5] Evers-Vermeul, J. (2015). Toetsing in context vraagt doordenking van de rol van taal. *De Cascade, 12*, 17-19.

Over de auteurs

Franziska van Dalen schrijft dit artikel als resultaat van het master onderzoek dat zij bij Cito uitvoerde en is inmiddels docent wiskunde aan het Oosterlicht College te Nieuwegein. Paul Drijvers schrijft dit artikel als wetenschappelijk onderzoeker bij Cito en is tevens hoogleraar in de didactiek van de wiskunde bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht. Hendrik Straat is wetenschappelijk onderzoeker bij de afdeling Psychometrie en Onderzoek van Cito.
E-mailadressen: *vandalenfranziska@gmail.com*; *Paul.drijvers@cito.nl*; *Hendrik.straat@cito.nl*

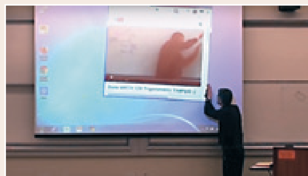
WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*.

Straks vmbo-diploma halen met wiskunde op vwo-niveau

Leerlingen in het voortgezet onderwijs moeten vakken waar ze goed in zijn op vwo-niveau kunnen volgen en andere vakken, die ze lastiger vinden, op havo of vmbo-niveau. Dat zegt Paul Rosenmöller, voorzitter van de VO-raad (de belangenorganisatie voor middelbare scholen), in een interview met *De Volkskrant*.
Dat betekent dat een scholier een maatwerkdiploma, één diploma met vakken op verschillende niveaus, moet kunnen halen. Op zo'n diploma staan dan bijvoorbeeld drie vakken op havo-niveau, twee op vwo-niveau en één op vmbo-niveau. Rosenmöller roept de politieke partijen op het maatwerkdiploma wettelijk mogelijk te maken. Nu kunnen jongeren nog maar op één niveau een diploma halen, maar Rosenmöller vindt dat niet meer van deze tijd. In Groot-Brittannië bestaat die mogelijkheid wel. Door een maatwerkdiploma in te voeren kan een school het onderwijs beter laten aansluiten op de talenten van een leerling, meent Rosenmöller. Hij introduceert daarbij het begrip 'ontschotting': het verwijderen van de schotten tussen vwo, havo en vmbo. Vakken op verschillende niveaus volgen en daarin examen doen is nu niet mogelijk omdat wettelijk is vastgesteld dat een leerling op slechts één niveau een diploma kan halen. Maar in het voorgestelde systeem van Rosenmöller kan een kind dat nu op havo-niveau zit en bijvoorbeeld slecht is in talen, de exacte vakken wel op vwo-niveau volgen en daar eindexamen in doen.
Staatssecretaris van Onderwijs Sander Dekker is groot voorstander van meer maatwerk in het voortgezet onderwijs, maar ziet ook een keerzijde. Een maatwerkdiploma kan talenten stimuleren, maar kan ook een onbedoeld effect hebben: dat leerlingen zich minder inzetten voor hun slechtste vakken. Bron: *nrc.nl*

1-Aprilgrap in wiskundeles



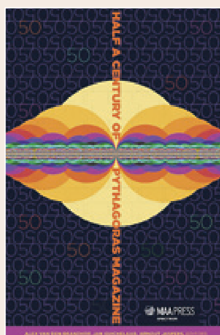
De Amerikaanse wiskundeleraar Matthew Weaters haalt al jaren grappen uit met zijn leerlingen op 1 april. Ook in 2015 was het weer raak. Zijn truc viel goed bij de leerlingen en ook op internet doet de video het goed. Sinds de internationale grappendag is de video al meer dan 1,5 miljoen keer bekeken. Ook zien?
Op *YouTube* is zijn grap te vinden. Misschien dat het u inspireert tot een eigen 1-aprilgrap in uw klas op vrijdag 1 april. We zien het graag als het geslaagd is!
Bron: *The MDWeathers Channel Youtube*

Eredoctoraat voor Tour Chayes



Dr. Jennifer Tour Chayes heeft op 8 februari 2016 tijdens de *Dies Natalis* van de Universiteit Leiden een eredoctoraat van prof. Frank den Hollander, hoogleraar Kansrekening en Statistische fysica, gekregen.
'Dr. Tour Chayes is een internationaal toponderzoekster op het gebied van de statistische fysica, de stochastiek en de discrete wiskunde en heeft de afgelopen dertig jaar baanbrekend werk verricht. Daarnaast heeft ze bij Microsoft een centrale rol gespeeld in het opstarten van een internationaal zeer succesvolle onderzoeksgroep. Onder haar leiding zijn opnieuw grote doorbraken bereikt, op het gebied van complexe netwerken. En ze zet zich wereldwijd in voor vrouwen in de wetenschap', aldus Den Hollander.
Dr. Tour Chayes heeft na haar promotie in de wiskundige natuurkunde aan Princeton Univerty ondermeer gewerkt aan de University of California in Los Angeles. In die tijd zorgde ze met anderen voor vele doorbraken in de studie van fase-overgangen, in het bijzonder de percolatietheorie en de theorie van veeldeeltjesystemen, iets waar ze veel respect mee afdwong bij zowel natuurkundigen als wiskundigen. Nu is zij algemeen directeur van Microsoft Research in Boston en New York City. Bron: Universiteit Leiden

Pythagoras Code goes USA

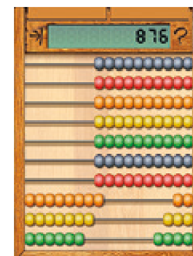


De Amerikaanse editie van *De Pythagoras Code* is uit! *Half a Century of Pythagoras Magazine* bevat het beste uit vijftig jaar *Pythagoras*. Het is niet zomaar een vertaling van *De Pythagoras Code*; de Engelse editie bevat ook vele andere puzzels en artikelen.
Het boek is nu als elektronische versie (*http://www.maa.org/press/ebooks/half-a-century-of-pythagoras-magazine*) te koop. Er zal spoedig een papieren versie volgen.
Bron: *www.wiskgenoot.nl*

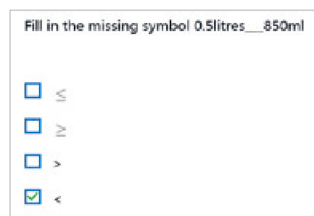
RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL

MICROSOFT MATH

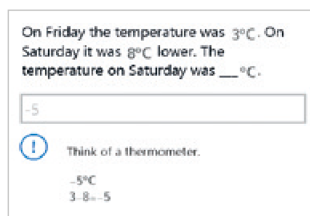
Lonneke Boels



De tips voor een wiskunde-app komen soms uit onverwachte hoek: deze keer van de echtgenoot van Lonneke Boels.



figuur 1 Basisvaardigheden rekenen



figuur 2 Rekenen met negatieve getallen

De app *Microsoft Math* oefent allerlei soorten wiskunde op een speelse manier. In totaal zijn er vijf onderwerpen: *Numbers and Operations, Algebra, Geometry and Measurement, Probability and Statistics* en *Calculus*. *Numbers and Operations* omvat bijvoorbeeld basisvaardigheden uit de onderbouw van havo/vwo zoals optellen van machten, getallen ontbinden in priemfactoren, notatie van een interval, breuken en kommagetallen, regels voor het afronden (*Basic Number Work*). Daarna wordt het snel lastiger met matrices en zelfs complexe getallen. Bij het onderdeel Algebra wordt het letterrekenen geoefend: haakjes wegwerken, ontbinden in factoren, enzovoorts. Binnen één onderwerp (bijvoorbeeld *Basic Number Work*) zijn er meerdere subonderwerpen (bijvoorbeeld: basisbewerkingen; breuken, kommagetallen en procenten; type getallen, afronden en nauwkeurigheid). Per subonderwerp zijn er meerdere *levels*. Het leuke van de app is dat je een *level* vrij snel haalt: je hoeft maar drie vragen goed te hebben. In een hoger *level* komen de vragen uit een vorig *level* soms terug zodat je de stof wel blijft oefenen/herhalen. Kansrekening begint vrij pittig met formele vragen en dat maakt dit onderwerp alleen geschikt voor bovenbouw vwo. Hierin staan ook onderwerpen van het nieuwe examenprogramma wiskunde C, zoals het Venn-diagram.

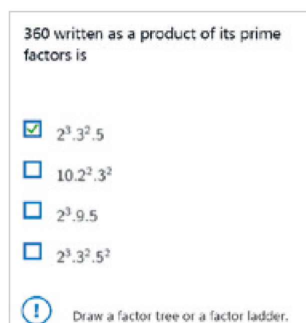
Je kunt het spel individueel spelen of gezamenlijk. Je kunt dus met een klas een groep aanmaken en dan als groep spelen. Lijkt me een geweldige manier om de basisvaardigheden van mijn leerlingen op een speelse manier te verbeteren. Deze optie heb ik nog niet uitgeprobeerd. Dat ga ik doen, zodra ik een *prepaid*-simkaart heb aangeschaft speciaal voor dit doel (zo bescherm ik mijn privénummer; in mijn telefoon passen twee simkaarten).

Het spel houdt ook een *ranking* bij. Na een half uurtje spelen, sta ik in januari op de 460e plek, en ben 10237e van de wereld. De top 10 wereldwijd staat met naam en toenaam in een lijst (tenzij je dit uitzet: dan sta je anoniem in de lijst). Het spel heeft wel één groot nadeel: je moet toegang tot al je contacten toestaan. Bij instellingen zou je dat vervolgens weer uit moeten kunnen zetten maar de meeste mensen zullen dit vermoedelijk niet doen en mij is het nog niet gelukt. Voor een gratis spel, betaal je daarmee toch een hoge prijs.

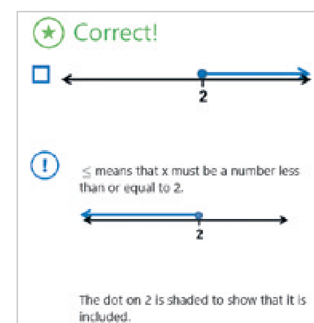
Pluspunten

- het is een spel met heel veel niveau's;
- de *rankinglist* daagt uit tot extra oefenen en *levels* halen om hoger te komen;
- de *ranking* per maand zorgt ervoor dat ook beginnende spelers snel hoger kunnen komen in de lijst;
- je kunt jezelf ook anoniem in de *rankinglist* zetten (bij instellingen in de app aanpassen);
- je kunt een groep aanmaken met je hele klas;
- de onderwerpen beginnen met makkelijke basisvaardigheden en wie dat beheerst gaat snel naar hogere *levels*;
- wie de stof niet (goed) beheerst, kan een *level* vaak oefenen;
- je krijgt na het geven van je antwoord direct uitleg over het correcte antwoord;
- je kunt het spel *offline* spelen (even het schuifje omzetten bij het gewenste *level* dan worden alle *levels* van het subonderwerp opgeslagen);
- de overlap met de stof van wiskunde in Nederland is redelijk groot;
- leerlingen krijgen soms ook vragen over onderwerpen die ze (nog) niet gehad hebben maar die met internet makkelijk uit te zoeken zijn;

figuur 3 Ontbinden in priemfactoren



figuur 4 Welke getallenlijn hoort bij $x \leq 2$?

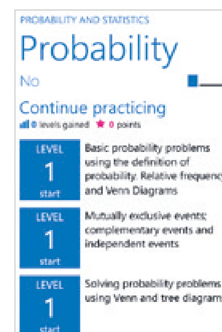


- je kunt verschillende typen wiskunde kiezen. Ik heb voor het internationale programma gekozen. Je kunt ook het Afrikaanse schoolprogramma kiezen;
- er lijken soms *challenges* te zijn. Het is niet duidelijk wat dit inhoudt maar ik vermoed wereldwijde wedstrijden.

Minpunten

- het spel is in het Engels. Met name voor onderbouwklassen kan dit een probleem zijn, tenzij je natuurlijk een tweetalige school bent;
- als je het spel vaker speelt, kom je regelmatig dezelfde vragen tegen;
- het lijkt erop dat een hoger *level* niet echt veel moeilijker is;
- sommige notaties wijken af van de onze. Een interval als $<\leftarrow, 3]$. wordt bijvoorbeeld genoteerd als $(-\infty, 3)$ wat met name verwarring geeft bij $<2, 3>$ omdat dit als $(2, 3)$ staat;
- sommige notaties zijn erg formeel of maken gebruiken van verzamelingen (N, Z et cetera) of $\in$ voor 'element van';
- soms is een grafiek erg klein dus slecht leesbaar en vergroten is niet mogelijk;
- een enkele vraag is fout;

figuur 5 Enkele *levels* van kansrekening



- de app wil toegang tot je contacten. Mogelijk is dit nodig vanwege het maken van een groep. Bij de melding staat dat je dit achteraf uit kunt zetten. Dat laatste is mij nog niet gelukt.

Eindoordeel: aanschaffen
Kosten: gratis
Getest op: Nokia Lumia 630
Website: *www.microsoft.com/nl-nl/store/apps/microsoft-math/9wzdncrdtkn3*

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen. E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*

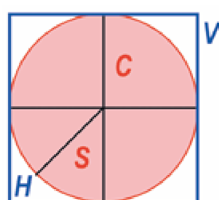
HOE WALLIS AAN ZIJN PRODUCT KWAM

Martin Kindt

Martin Kindt schrijft deze keer over een van de merkwaardigste formules uit de wiskunde: het product van Wallis. Het betreft hier een oneindig voortlopend patroon van breuken waarvan het product de uitkomst $4/\pi$ heeft. Je kunt dit vinden in universitaire leerboeken en collegedictaten als gevolg van een geraffineerd spel met integralen. Maar Wallis vond zijn product vóór de uitvinding van de differentiaal- en integraalrekening!

Kwadratuur van de cirkel

Tegenwoordig wordt hiervoor de uitdrukking 'mission impossible 'gebruikt. De filosoof Thomas Hobbes dacht zijn missie voltooid te hebben, maar dat kwam hem op niet mis te verstane kritiek te staan. Een van de critici was John Wallis die in tegenstelling tot Hobbes geen synthetische maar een analytische weg zocht en dat leidde tot de naar hem genoemde bijzonder formule $4/\pi = 3/2 \times 3/4 \times 5/4 \times 5/6 \times 7/6 \times 7/8 \times \ldots$ *ad inf.*
Voordat ik de stappen die Wallis maakte beschrijf, wil ik de formule een beetje plausibel maken. Het linkerlid van de formule is duidelijk gelijk aan de verhouding van de oppervlakten V en C van respectievelijk een vierkant en zijn ingeschreven cirkel. Met een goed timmermansoog is wel te zien dat sector S een grotere oppervlakte heeft dan het 'hoekje' H met gevolg: $V/C < 3/2$.



$$\frac{V}{C} = \frac{4H + 8S}{8S} < \frac{12S}{8S} = \frac{3}{2}$$

figuur 1

'Kleiner dan' betekent hetzelfde als 'een fractie van'. Probeer 3/4. Deze schatting is wat te groot: $V/C > 3/2 \times 3/4 = 9/8$. Met een beetje goede wil is dit ook te 'zien', het komt neer op $4H > S$. Dan vermenigvuldigen met een breuk groter dan 1, maar natuurlijk kleiner dan 4/3. De eerste kandidaat is 5/4. Met de benadering van Archimedes in het achterhoofd - π ligt tussen 223/71 en 22/7 - kan worden geverifieerd dat: $V/C < 3/2 \times 3/4 \times 5/4$.
Er tekent zich een alternerend patroon af, dat ik blijmoedig extrapoleer:
$V/C > 3/2 \times 3/4 \times 5/4 \times 5/6$
$V/C < 3/2 \times 3/4 \times 5/4 \times 5/6 \times 7/6$
$V/C > 3/2 \times 3/4 \times 5/4 \times 5/6 \times 7/6 \times 7/8$
enzovoort.
Het is allemaal nog pure speculatie. Dat de kandidaat-ondergrenzen een stijgende rij vormen, volgt uit:
$5 \times 5 > 4 \times 6$, $7 \times 7 > 6 \times 8$, $9 \times 9 > 8 \times 10$, ...
Algemeen: $n^2 > (n - 1)(n + 1)$

Net zo is te begrijpen dat de kandidaat-bovengrenzen stap voor stap kleiner worden. Als het patroon ons niet bedriegt, wordt het quotiënt V/C bij dit proces in een steeds kleiner interval geperst. Die intervallen krimpen niet alleen, zij verschrompelen tot één punt. Om dit in te zien beschouw ik de ondergrenzen o_1, o_2, o_3, ... en de bovengrenzen b_1, b_2, b_3, ... met:

$$o_1 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \qquad b_1 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4}$$
$$o_2 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \qquad b_2 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6}$$
$$o_3 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \frac{7}{8} \qquad b_3 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{8}$$
$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

figuur 1a

Er volgt dan:

$$b_1 - o_1 = \tfrac{1}{5} b_1 < \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{3}{2}$$
$$b_2 - o_2 = \tfrac{1}{7} b_2 < \tfrac{1}{7} \cdot \tfrac{3}{2}$$
$$b_3 - o_3 = \tfrac{1}{9} b_3 < \tfrac{1}{9} \cdot \tfrac{3}{2}$$
$$\ldots\ldots$$

figuur 1b

Kort en goed:

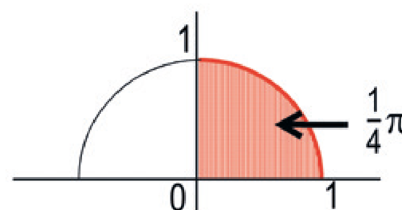
$$b_n - o_n < \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{3}{2}$$

figuur 1c

Het rechterlid heeft de limiet 0 voor $n \to \infty$. Hiermee is wel duidelijk geworden dat het product van Wallis convergeert, maar dat de limiet gelijk is aan $4/\pi$ is natuurlijk bij lange na nog niet zeker.

De driehoek van Pascal

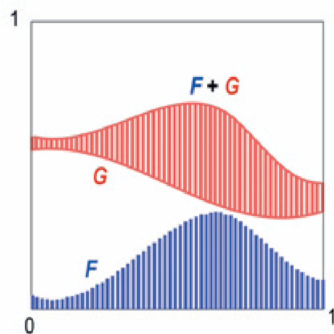
Wallis wilde toewerken naar de oppervlakte onder de grafiek van $y = (1 - x^2)^{1/2}$ op het interval [0,1].



figuur 2

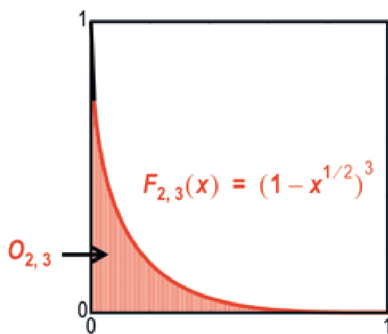
Hij gebruikte een nogal raadselachtige omweg om daar uit te komen. Hij bestudeerde namelijk eerst de op [0,1] gedefinieerde familie van functies gegeven door: $F_{p,n}(x) = (1 - x^{1/p})^n$ met p en n als natuurlijke getallen. Met $p = 0$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ en met $n = 0$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ liet hij de constante functie $x \to 1$ corresponderen. Vervolgens berekende hij de oppervlakte onder de grafieken van $F_{p,n}$. Hij gebruikte de door hemzelf ontdekte regel[1]:

oppervlakte onder $y = x^{m/n}$ op [0,1] is $\dfrac{1}{\frac{m}{n}+1}$. En ook dat de oppervlakte onder de som (of verschil) van twee functies gelijk is aan de som (of verschil) van de oppervlakten van die functies. Dat volgt uit wat nu wel het principe van Cavalieri wordt genoemd: een oneindige som van lijnstukken verandert niet als die lijnstukken stuk voor stuk over een continu veranderende afstand worden verschoven.



figuur 3

In 'moderne' taal: de integraal van de som (of verschil) van twee functies (op eenzelfde interval) is de integraal van de som (of verschil)van die functies.
Bijvoorbeeld $p = 2$ en $n = 3$.



figuur 4

Er geldt: $(1 - x^{1/2})^3 = 1 - 3x^{1/2} + 3x - x^{3/2}$
Oppervlakteberekening volgens Wallis geeft:

$$O_{2,3} = 1 - 3 \times \frac{1}{\frac{1}{2}+1} + 3 \times \frac{1}{1+1} - \frac{1}{\frac{3}{2}+1} = \frac{1}{10}.$$

De oppervlakte van het omhullende vierkant is dus tien keer zo groot als de oppervlakte onder de grafiek van $F_{2,3}$. Wallis rekende nog veel meer van dergelijke oppervlakteverhoudingen uit en schreef zijn uitkomsten overzichtelijk in een 11 × 11-tabel waarvan hierna een gedeelte is afgebeeld. De eerste rij en de eerste kolom wekken geen verbazing. Verdere bestudering van de tabel levert een verrassing op: de driehoek van Pascal!

p \ n	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7
2	1	3	6	10	15	21	28
3	1	4	10	20	35	56	84
4	1	5	15	35	70	126	210
5	1	6	21	56	126	252	462
6	1	7	28	84	210	462	924

figuur 5

Kan ik snappen dat in de cel (p, n) het getal $\binom{p+n}{n}$ moet komen? In de kolom $n = 1$ staan de getallen $p + 1$, want de oppervlakte onder de grafiek van $F_{p,1}(x) = 1 - x^{1/p}$ is $1 - \dfrac{1}{\frac{1}{p}+1} = 1 - \dfrac{p}{p+1} = \dfrac{1}{p+1}$
Nu $n = 2$: $F_{p,2}(x) = (1 - x^{1/p})^2 = 1 - 2x^{1/p} + x^{2/p}$ en $O_{p,2}$ is gelijk aan:

$$1 - \frac{2}{\frac{1}{p}+1} + \frac{1}{\frac{2}{p}+1} = p\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p+1} + \frac{1}{p+2}\right)$$
$$= p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2}\right)$$
$$= p\left[\frac{1}{p(p+1)} - \frac{1}{(p+1)(p+2)}\right]$$
$$= p \cdot \frac{2}{p(p+1)(p+2)} = \frac{1}{\binom{p+2}{2}}$$

Het ziet er misschien omslachtig uit en ik had natuurlijk sneller tot dit resultaat kunnen komen, maar de gevolgde rekenwijze geeft mij inzicht. Het verschil van twee opvolgende stambreuken (derde stap) is altijd weer een stambreuk en het is bij de volgende stap duidelijk dat de teller onafhankelijk van p moet zijn. Bovendien kan ik inductief verder. Zo komt er voor $O_{p,3}$:

$$p\left(\frac{1}{p} - \frac{3}{p+1} + \frac{3}{p+2} - \frac{1}{p+3}\right) =$$
$$= p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{2}{p+1} + \frac{2}{p+2} + \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+3}\right)$$
$$= p\left[\frac{1}{p(p+1)} - \frac{2}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+2)(p+3)}\right]$$

figuur 5b

De middelste breuk kan nu weer worden gesplitst in twee breuken met teller 1 en dit leidt tot

$$= p\left[\frac{2}{p(p+1)(p+2)} - \frac{2}{(p+1)(p+2)(p+3)}\right]$$
$$= p \cdot \frac{6}{p(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{1}{\binom{p+3}{3}}$$

figuur 5c

Zo kunnen de kolommen in de tabel stapsgewijs worden berekend en ontstaat de driehoek van Pascal. Naast de additieve recursie in Pascal's patroon is er ook een multiplicatieve recursie:

$$\binom{p+n}{n} \times \frac{p+n+1}{n+1} = \frac{(p+n)!}{n!\,p!} \times \frac{p+n+1}{n+1} = \frac{(p+n+1)!}{(n+1)!\,p!} = \binom{p+n+1}{n+1}$$

figuur 5d

Voor de oppervlakten $O_{p,n}$ zou dan moeten gelden:

$$O_{p,n} \times \frac{n+1}{p+n+1} = O_{p,n+1}.$$

Liefhebbers van integraalrekening kunnen deze recursie proberen te bewijzen via slimme partiële integratie en substitutie toegepast op: $O_{p,n} = \int_0^1 F_{p,n}(x)dx$

Naar de cirkel

Wallis wilde nu naar de oppervlakte onder de grafiek van $y = (1 - x^2)^{1/2}$, met andere woorden naar de oppervlakte onder de grafiek van $F_{p,n}$ met $p = n = 1/2$. Hij interpoleerde in zijn tabel eerst door een rij $p = 1/2$ tussen te voegen. Dit komt neer op het berekenen van de oppervlakte op [0,1] onder de grafiek van $x \to (1 - x^2)^n$. En zowaar, bovenstaande recursieregel leek nu ook op te gaan. De stap van n naar $n + 1$ zou dan moeten neerkomen op een vermenigvuldiging met

$\frac{n+1}{\frac{1}{2}+n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}$. Dus achtereenvolgens met 4/5, 6/7, 8/9, ...

Voor $n = 1$ geldt: $O_{1/2,1} = 1 - 2/3 = 2/3$. Voor $n = 2$ moet de oppervlakte worden berekend onder de grafiek van $x \to 1 - 2x^2 + x^4$ en dat geeft: $O_{1/2,2} = 1 - 2/3 + 1/5 = 8/15$ en dat is inderdaad gelijk aan $4/5 \times O_{1/2,1}$.
De lezer kan zelf nog een paar gevallen doorrekenen en constateren dat het ook hier weer goed lijkt te gaan. Voor de scherpslijpers: partiële integratie geeft zekerheid! Hier is een fragment van Wallis' nieuwe tabel:

p \ n	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1/2	1	3/2	15/8	35/16	315/128	693/256
1	1	2	3	4	5	6

figuur 6

Zijn laatste stap was om nu verder te interpoleren in de tabel door cellen met $n = 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$ toe te voegen. Voor $p = 0$ vulde hij overal 1 in. Voor $p = 1$ gebruikte hij de (meetkundig!) te begrijpen regel dat de oppervlakte onder $y = (1 - x)^{m/2}$ gelijk is aan: $\frac{1}{\frac{m}{2}+1} = \frac{2}{m+2}$. Maar hoe te handelen bij $p = ½$?

p \ n	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3
0	1	1	1	1	1	1	1
1/2	1	?	3/2	?	15/8	?	35/16
1	1	3/2	2	5/2	5	7/2	4

figuur 7

Wallis stelde het getal in de cel $p = n = ½$ voor door een vierkantje en paste, geleid door een voorgevoel van permanentie, de multiplicatieve Pascal-recursie toe om de andere vakken in te vullen. De stap van $p = ½$, $n = k + ½$ naar $p = ½$, $n = k + 1½$ gaat volgens die recursieregel gepaard met een vermenigvuldiging met de factor:

$$\frac{\frac{1}{2} + (k + 1\frac{1}{2})}{k + 1\frac{1}{2}} = \frac{k+2}{k+1\frac{1}{2}} = \frac{2k+4}{2k+3}$$

Als ik nu in plaats van Wallis' vierkantje in $p = n = ½$ de letter w schrijf , komt er:

p \ n	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3
0	1	1	1	1	1	1	1
1/2	1	w	$\frac{3}{2}$	$w \times \frac{4}{3}$	$\frac{3}{2} \times \frac{5}{4}$	$w \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5}$	$\frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6}$
1	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	5	$\frac{7}{2}$	4

figuur 8

De rij van quotiënten (groeifactoren) in de regel $p = 1$ is dalend en die eigenschap extrapoleerde Wallis naar de rij van quotiënten in de regel $p = ½$.
Zo kwam hij tot:

$$\frac{w}{1} > \frac{\frac{3}{2}}{w} > \frac{w \times \frac{4}{3}}{\frac{3}{2}} > \frac{\frac{3}{2} \times \frac{5}{4}}{w \times \frac{4}{3}} > \frac{w \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5}}{\frac{3}{2} \times \frac{5}{4}} > \ldots$$

figuur 8a

Met als gevolg:

$$\sqrt{\frac{3}{2}} < w < \frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \sqrt{\frac{5}{4}} < w < \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \sqrt{\frac{7}{6}} < w < \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \sqrt{\frac{7}{8}}$$

figuur 8b

En hieruit kon hij concluderen dat

$$w = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{6} \times \frac{7}{8} \times \ldots ad\ inf$$

figuur 8c

Meer over Wallis' queeste is te vinden in [1] en [2].

Wis(h)ful thinking
Wallis maakte zich, in zijn zoektocht naar de benadering van π, voortdurend schuldig aan wishful thinking. Vooral het interpoleren in de driehoek van Pascal was gedurfd. Een actie die Newton zou inspireren tot een uitbreiding van de definitie van binomiaalcoëfficiënt. In moderne notatie: $\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot(\frac{1}{2}-2)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}$.
Deze getallen zijn de coëfficiënten in de door Newton gevonden reeksontwikkeling van de functie $x \to (1+x)^{1/2}$. Het permanentie-principe in optima forma!
Maar kun je bij Wallis'speculaties wel van 'schuldig' spreken? Het herkennen en uitbreiden van patronen, het gebruik maken van analogieën, het generaliseren, het zijn stuk voor stuk wiskundige kernactiviteiten! Toen ik voor het eerst in een boek over de geschiedenis van de wiskunde een verslag van Wallis' werk las, was ik diep onder de indruk. Tijdens mijn studie was ik het fantastische product van Wallis tegengekomen, maar de weg er naar toe bleef verborgen. Alleen het resultaat met bewijs telde. Wallis' oorspronkelijke aanpak was voor mij een ultiem voorbeeld van een avontuurlijke wiskundespeurtocht. Dat niet iedereen er zo over denkt, blijkt uit [4] waarin Jean-Paul Delahaye de zoektocht van Wallis kwalificeert als een *afzichtelijk prutswerk waarvan de details moeilijk te rechtvaardigen zijn met onze huidige criteria*.[5] Wel spreekt hij van een schitterend resultaat, *dat men later nooit meer vergeten is*.
Wallis zal zich misschien pas na numerieke inspectie wat sterker hebben gevoeld. Maar numerieke verificatie moet toen heel wat voeten in de aarde hebben gehad, want de convergentie van Wallis' product is tergend traag. Bij 5000 breuken is het product bij benadering 3,1414355935 en deze breuk bevat nog maar drie correcte decimalen na de komma.
Als slot van dit drieluik over het permanentie-principe wil ik nog een staaltje *wishful thinking* van Euler memoreren. (zie ook [6], *chapter II*). Op school leren we dat factorontbinding van een veelterm hand in hand gaat met bepalen van de nulpunten. Bedenk daarbij dat je bijvoorbeeld in plaats van $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ ook kunt schrijven: $1 - 5/6x + 1/6x^2 = (1 - x/2)(1 - x/3)$. Euler bedacht dat dit bij een oneindig polynoom misschien ook zou kunnen. Hij was op de hoogte van de reeksontwikkeling van $\sin(x)$, die Newton ontdekt had en gebruikte die zó:

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

Omdat deze functie de nulpunten $\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \pm4\pi, \ldots$ heeft, waagde hij het om te veronderstellen:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\ldots$$

Ofwel $$\frac{\sin(x)}{x} = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

Een oneindig product! De coëfficiënt van x^2 in dit product is dan gelijk aan de oneindige som:

$$-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots\right).$$

In de reeksontwikkeling is die coëfficiënt –1/3! en zo kwam Euler tot de nu beroemde oneindige som:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Vóór Euler hadden veel grote wiskundigen (ook Wallis) hun tanden stuk gebeten op het vinden van som van de oneindige rij omgekeerde kwadraten. Euler ontleende het vertrouwen in de uitkomst na uitgebreide numerieke testen. Later slaagde hij er in een echt bewijs te vinden. Net als bij Wallis was zijn eerste aanpak een vernuftig staaltje extrapolatie. Het aardige is nog dat als in de oneindige ontbinding

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \left(1-x^2\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\left(1-\frac{x^2}{16}\right)\ldots$$

de substitutie x = ½ wordt uitgevoerd, het product van Wallis te voorschijn komt!
Wishful thinking heeft de wiskunde vaak mijlen verder gebracht. In de lerarenopleiding zouden historische voorbeelden zoals dat van Wallis, wat mij betreft veel meer aandacht mogen (of *moeten*) krijgen. En in dit verband durf ik '*wishful thinking*' dan ook wel te vertalen als 'wis(h)kundige denkactiviteit'.

Noten

[1] Kindt, M. (2015), Hoe oneigenlijk is oneigenlijk?, *Euclides, 91*(4)
[2] Edwards jr., C.H. (1979), *The Historical Development of Calculus*, New York
[3] Struik, D.J. (1986), *A Source Book in Mathematics 1200 - 1800*, Princeton University Press
[4] Delahaye, Jean-Paul (1997), *Het fascinerende getal* π, de Wetenschappelijke Bibliotheek
[5] Misschien moet het wel heel negatieve 'prutswerk' op het conto van de vertaler worden geschreven, het woord 'knutselwerk' heeft hetzelfde Franse equivalent.
[6] Polya, G. (1954), *Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding en leerplanontwikkelaar en onderzoeker; ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut.
E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

HET FIZIER GERICHT OP...

WISKUNDE IN HET TECHNISCH HBO

Arthur Bakker
Nathalie van der Wal

In FIzier belichten medewerkers van het Freudenthal Instituut een thema uit hun werk en slaan hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering schrijven Nathalie van der Wal en Arthur Bakker over de specifieke rol van wiskunde in het hoger technisch beroepsonderwijs.



Door de komst van computers is er in de laatste decennia veel veranderd in de beroepspraktijk van hbo-ingenieurs. Berekeningen worden uitgevoerd met *softwaretools* en nauwelijks meer met de hand. Vooral *Excel* wordt veel gebruikt als *calculatietool*. De veranderingen in de technische beroepspraktijk vragen om nieuwe vaardigheden die *techno-mathematical literacies* (*TmL*) worden genoemd. TmL zijn een combinatie van wiskundige kennis, ict, beroepsspecifieke- en communicatieve vaardigheden. Onderdelen hiervan zijn bijvoorbeeld gevoel voor getallen hebben (*number sense*) en het inschatten of getallen zouden kunnen kloppen (*sense of error)*. Ook grafische informatie moet op de juiste manier geïnterpreteerd worden.[1]

Binnen het technisch hbo is er sprake van een brede discussie over de vraag welke wiskunde nodig is. Het aantal uren voor wiskunde in het curriculum is bij de meeste opleidingen gedaald, maar de aanpak is daarentegen nog veelal hetzelfde: er wordt met pen en papier gerekend en de inhoud is meestal zonder context. De opgaven zijn abstract met af en toe wat kleine toepassingen. Ook voor de eerder genoemde *number sense*, de *sense of error* en het kunnen schatten bijvoorbeeld, zien we weinig aandacht in de curricula. Het gebruik van in de beroepspraktijk gangbare ict is zeer beperkt, bijvoorbeeld bij het berekenen van de standaarddeviatie. Studenten leren deze met de hand te berekenen, maar het is tegenwoordig belangrijker om te kunnen bepalen welke van de vijf soorten standaarddeviaties in *Excel* gebruikt moet worden en voor welk doel.[2]

Welke TmL worden door hbo-ingenieurs in de beroepspraktijk gebruikt en welke aanbevelingen levert dit op voor het wiskundecurriculum? De eerste vraag heeft geleid tot een beroepenveldonderzoek in het gehele technische domein. Vanuit vijftien opleidingen van *Applied Science*, ict, *Built Environment* en *Engineering* is een hbo-ingenieur gezocht en vervolgens op de werkplek uitgebreid geïnterviewd. Er is onder andere gevraagd naar de wiskundige en technische vaardigheden en naar demonstraties van kenmerkende beroepstaken.

Wat hbo-ingenieurs in hun werk heel vaak gebruiken, is specifieke beroepssoftware. Verder gebruikt vrijwel iedereen *Excel* als plannings- of calculatietool. Soms is de calculatietool een *black box*; er worden waarden ingevoerd en er komen waarden uit, maar wat er precies tussenin gebeurt, is onbekend voor de gebruiker. Een voorbeeld van een *black box*-situatie: een hbo-ingenieur Chemie die vijftien jaar in het vak zit, vertelt over een specifieke softwaretool voor spectrometrie:

Interviewer: Voor jou is dit dus een *black box*, deze wiskunde die hier achter zit?
Chemicus: Ja.
Interviewer: Is dat een probleem voor de interpretatie van je antwoorden?
Chemicus: Nee. De eiwitten die we gewoon gekocht hebben, daarvan weten we dat het RNAse is, we weten welke massa die heeft. We weten ongeveer hoe het spectrum er uitziet dus als we dat er gewoon doorheen gooien dan krijgen we de exacte massa eruit. Ja, doordat je vergelijkbare dingen met zekerheid weet kun je de interpretatie van dit daar gewoon mee vergelijken en ook al weet je de wiskunde niet, denken van: nou ja dat moet kunnen kloppen. Bovendien wat die hier uitspuugt kunnen we ook weer toetsen met dat liniaaltje.

De chemicus laat hier, waarschijnlijk door zijn jarenlange ervaring, *number sense* en *sense of error* zien. Hij checkt vergelijkbare spectra en ook controle met een *old skool*-methode zoals een liniaaltje helpt met de interpretatie.
De TmL die in de beroepspraktijk gevonden werden zijn gegroepeerd in categorieën. Ze bestaan uit de volgende vaardigheden: omgaan met beroepssoftware, het hebben van *number sense* (kunnen omgaan met cijfers, algebra en formules), een *sense of error* (hier hoort bijvoorbeeld kunnen schatten bij), ruimtelijk inzicht (omgaan met technische tekeningen) en wiskundig-technisch kunnen communiceren (ook kunnen versimpelen: *Nijntje-taal* spreken). Deze vaardigheden zouden wat ons betreft dus ook aandacht moeten krijgen in het hbo-curriculum.

Noten

[1] Hoyles, C., Noss, R., Kent, P. & Bakker, A. (2010). *Improving Mathematics at Work: The Need for Techno-Mathematical Literacies.* London: Routledge.

[2] Bakker, A. (2014). *Implications of technology on what students need to know about statistics.* In Wassong, T., Frischemeier, D.,Fischer, P.R., Hochmuth, R., Bender, P. (Eds.). *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics* (pp. 143-152). Wiesbaden: Springer.

Over de auteurs

Arthur Bakker is universitair hoofddocent aan het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht. Hij heeft aan de University of London onderzoek gedaan naar *Techno-mathematical Literacies* in de beroepspraktijk (2004-2007), en in Nederland onderzocht hoe mbo'ers beroepsgerichte wiskundige kennis kunnen ontwikkelen (2007-2011). E-mailadres: *A.Bakker4@uu.nl*

Nathalie van der Wal is docent wiskunde bij Avans Hogeschool in het technische domein en buitenpromovendus bij het Freudenthal Instituut. Haar promotieonderzoek heeft als vraag hoe het wiskundeonderwijs voor het technisch hbo ingericht kan worden zodat het aankomende ingenieurs helpt de techno-mathematical Literacies te ontwikkelen die nodig zijn in de beroepspraktijk. E-mailadres: *n.j.vanderwal@uu.nl*

DIGITAAL EXAMEN BASISBEROEPSGERICHT

Ruud Jongeling

Op donderdag 19 november 2015 heeft het College voor Toetsing en Examens (CvTE) een evaluatiemiddag gehouden voor de digitale examens voor de basisberoepsgerichte (BB) en kaderberoepsgerichte (KB) leerweg van het vmbo met leden van de vaststellingscommissie, deskundigen van het CITO en wiskundedocenten die lesgeven in de BB en KB leerwegen. Een goed initiatief van het CvTE dat leidde tot een zinvolle bijeenkomst waarover Ebrina Smallegange al eerder in *Euclides* berichtte. Als voorbereiding op de bijeenkomst was de deelnemers gevraagd naar de digitale oefenexamens op *http://oefenen.facet.onl* te kijken. Ruud Jongeling bespreekt de opgaven van het oefenexamen voor BB dat eerder als eindexamen in 2015 is afgenomen als variant h1.

Ik heb het examen met belangstelling bekeken en om maar met de deur in huis te vallen: het viel me niet mee. In het examen zag ik een aantal onvolkomenheden die naar mijn mening niet in een examen thuishoren. Daarnaast zag ik dat de digitale vorm van het examen nog steeds beperkingen geeft voor de leerling bij het oplossen van de opgave. In dit artikel zal ik een paar van deze onvolkomenheden en beperkingen noemen. Ik zal aangeven hoe het naar mijn mening mogelijk is dat een examen met dergelijke onvolkomenheden en beperkingen toch wordt afgenomen en nu als proefexamen voor leerlingen wordt gepresenteerd. Ten slotte zal ik aangeven hoe ik denk dat we tot verbeteringen kunnen komen.

Onvolkomenheden

De eerste onvolkomenheid kom ik tegen in de opgave *Kaarsen,* zie figuur 1. Het betreft een opgave met een wortelverband waarin de leerling moet laten zien dat bij een brandtijd van 10 uur de lengte van een kaars 7,4 cm is. Het wortelteken is voor de leerling echter niet beschikbaar. De leerling krijgt hiervoor het advies de letter V of het woord 'wortel' te gebruiken. De letter V is voor de leerlingen in de sector techniek het symbool voor elektrische spanning en het woord 'wortel' is een woordvariabele in een formule. Door een beperking van

Kaarsen

Marlon heeft kegelvormige kaarsen.

Er is een woordformule waarmee je de lengte van de kaars kunt uitrekenen als je weet hoeveel uur de kaars gebrand heeft.

lengte kaars = 20 − 4 × $\sqrt{brandtijd}$

Hierin is *lengte kaars* in cm en *brandtijd* in uren.



Laat zien dat bij een *brandtijd* van 10 uur de *lengte* van de *kaars* afgerond 7,4 cm is.
Typ je berekening in.

» Gebruik de letter V als wortelteken. Of typ voluit: wortel.

figuur 1 Uit: vmbo BB h1 (Kaarsen)

de digitale afname worden leerlingen nu gedwongen tot niet-correcte notaties.
Bij opgave 4 van het examen wordt de leerling gevraagd de wortelformule aan te passen aan een andere kegelvormige kaars die wat korter en dikker is, zie figuur 2. Het kunnen gebruiken van een formule met daarin een wortelteken hoort tot de examenstof voor BB. Het aanpassen van een wortelformule aan een nieuwe situatie hoort niet tot de eindtermen van BB en had in dit examen niet gevraagd mogen worden.

Marlon heeft ook nog andere kaarsen die ook kegelvormig zijn, maar een andere lengte en een andere dikte hebben.

Twee van die andere kaarsen zijn kaars I en kaars II.

Bij kaars I hoort de volgende woordformule

lengte kaars = 24 − 5 × $\sqrt{brandtijd}$

Kaars II is korter en dikker.

Welke woordformule hoort bij kaars II?

lengte kaars = [▾] - [▾] × $\sqrt{brandtijd}$

figuur 2 Uit: vmbo BB h1 (Kaarsen)

Opgave 8 betreft een tijdberekening van een treinreis. Gevraagd wordt hoe laat de trein aankomt bij een afstand van 245 km, een gemiddelde snelheid van 70 km/u en een vertrektijd van 11.05. Zie figuur 3. Verwarrend, die vertrektijd, want wij leren onze leerlingen dat 11:05 betekent 11 uur en 5 minuten en dat 11,05 uur omgerekend dient te worden tot 11 uur en 3 minuten. De rekenmachine die bij dit examen zit, gebruikt de toets met de punt als komma, dus hoe moet de leerling 11.05 interpreteren?
De opgaven 14, 15 en 16 laten een grafiek zien die de winst van boer Emiel weergeeft, zie figuur 4. De winst

Betuwelijn

De trein, geladen met ijzererts, heeft een gemiddelde snelheid van 70 km per uur.
Deze trein vertrekt om 11.05 uur vanuit Rotterdam naar een fabriek in Wuppertal (Duitsland).
De afstand van Rotterdam naar Wuppertal (Duitsland) is 245 km.

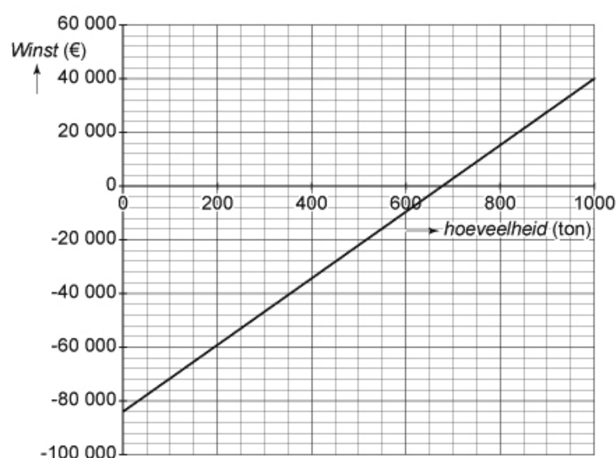
Bereken hoe laat de trein in Wuppertal aankomt.
Typ je berekening in.

figuur 3 Uit: vmbo BB h1 (Betuwelijn)

is afhankelijk van de hoeveelheid aardappelen die Emiel verkoopt. In opgave 14 wordt gevraagd of Emiel winst maakt bij een slechte oogst van 200 ton. De leerling moet zijn antwoord uitleggen. Het correctievoorschrift vereist dat de leerling eerst afleest dat de winst -60.000 euro is (1 punt) om daarna vast te stellen dat er geen winst is (2e punt). Het correctievoorschrift is hier met zichzelf in tegenspraak. Dat komt doordat het begrip winst in de opgave een dubbele betekenis heeft. De leerling moet winst in de grafiek zien als de opbrengst na verkoop van de aardappelen en die kan negatief zijn. Bij het trekken

Aardappelen

In de grafiek zie je het verband tussen de *hoeveelheid* aardappelen die Emiel verkoopt en zijn *winst*.



Bij een slechte oogst verkoopt Emiel maar 200 ton aardappelen.

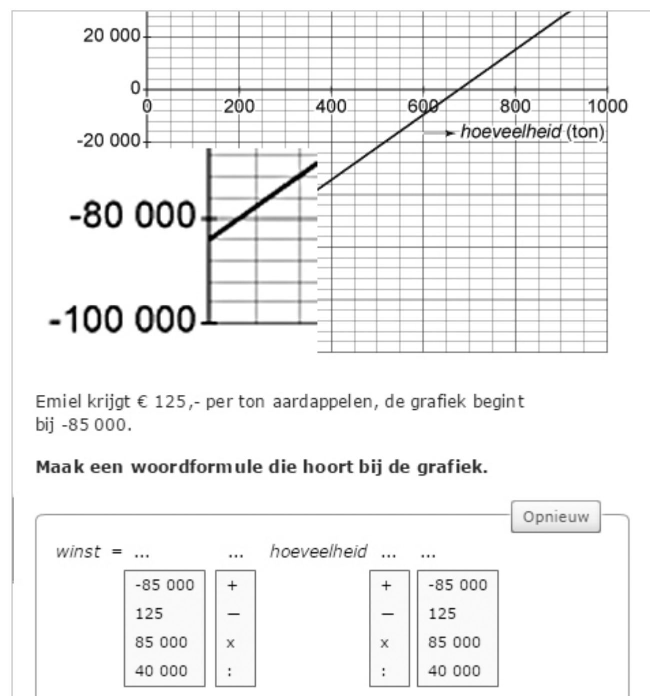
Maakt hij dan winst?
Typ je uitleg in.

figuur 4 Uit: vmbo BB h1 (Aardappelen)

van conclusies wordt van de leerling verwacht dat hij winst ziet als een positieve opbrengst na verkoop want bij negatieve opbrengst is er geen winst maar verlies.
Bij opgave 16 wordt van de leerling verwacht dat hij een woordformule maakt bij de grafiek. Op de plaats van de stippen kan de leerling kiezen uit getallen en symbolen. Er lijkt niets mis met de opgave tot je de grafiek nauwkeurig bekijkt, zie figuur 5. In het correctievoorschrift wordt -85000 als startgetal voorgeschreven. De grafiek start echter bij -84.000 euro en deze oplossing kan de leerling niet kiezen!

Beperkingen

In principe hoort de leerling vrij te zijn in het kiezen van een oplossingsstrategie. Het papieren examen voldoet daar vrijwel geheel aan maar het digitale examen kent

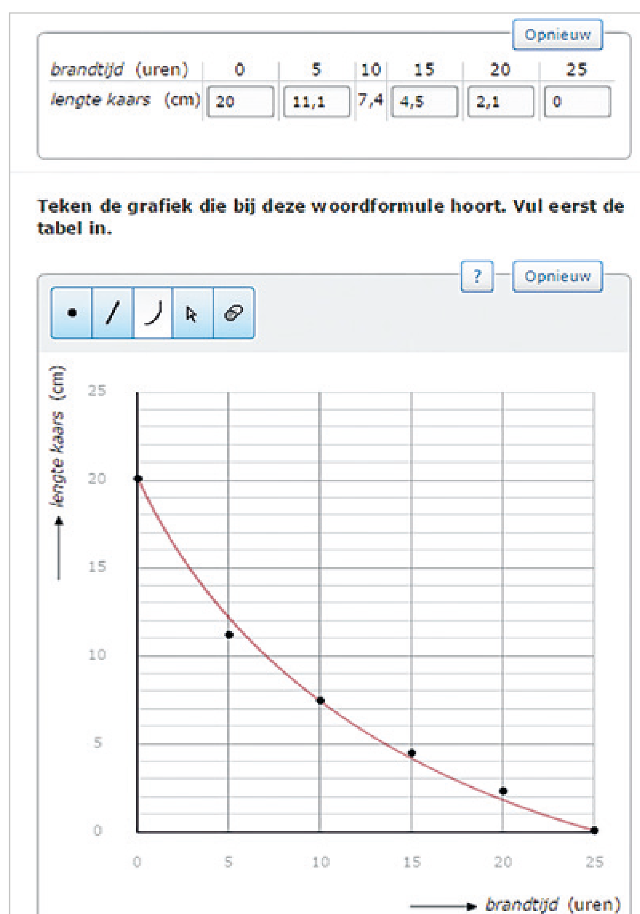


figuur 5 Uit: vmbo BB h1 (Aardappelen)

beperkingen. Er is binnen de CvTE en Cito aandacht voor deze problematiek maar het examen stelde me teleur in de vorderingen die gemaakt zijn. Laat ik enkele voorbeelden geven. In opgave 3 wordt de leerling gevraagd bij het wortelverband een tabel in te vullen en daarna een grafiek te tekenen. Het plaatsen van de punten is te doen maar het tekenen van een kromme door de punten is niet goed mogelijk. Het blijft een benadering van de gewenste grafiek, zie figuur 6.
Bij opgave 12 moet de afstand tussen twee punten op een kaart worden berekend, zie figuur 7. De opgave biedt de leerling de mogelijkheid gebruikt te maken van de verhoudingstabel. Veel leerlingen hebben geleerd te werken met rekenpijlen maar deze worden in het examen niet aangeboden. Natuurlijk kan de leerling los van de computer op papier de berekening maken en deze transformeren in een tekst op het scherm. Ik ben echter van mening dat een computerexamen de leerling alle mogelijkheden dient aan te bieden die hij eventueel nodig heeft. Het omzetten van een berekening op papier naar een tekst op het beeldscherm is een vaardigheid die naar mijn mening in een examen niet getoetst hoort te worden.
In opgave 21 gaat de leerling aan de slag met het rekenen met procenten, zie figuur 8. Veel leerlingen op het vmbo hebben geleerd daarbij een verhoudingstabel te gebruiken maar bij deze opgave wordt die mogelijkheid niet aangeboden. Bij de papieren examens is het opschrijven van een correct ingevulde verhoudingstabel, met een conclusie erbij, een voldoende antwoord. In het digitale examen moet de leerling in dat geval eerst op papier zijn berekening maken om deze daarna naar het beeldscherm te transformeren. Dit is nodeloos lastig voor een leerling. De digitale examens BB en KB worden vanaf dit schooljaar in een nieuwe examenomgeving afgenomen. Hierin zal ongetwijfeld aan een aantal van mijn bezwaren tegemoet worden gekomen. Mogelijk komen het wortelteken en bijvoorbeeld rekenpijlen en tabellen beschikbaar. Misschien dat het tekenen van een vloeiende lijn door punten verder ontwikkeld wordt. Het neemt niet weg dat ik na afloop van dit BB examen met het gevoel bleef zitten dat wanneer een examen met dit soort tekortkomingen en beperkingen betrekking zouden hebben gehad op het havo of vwo, de wiskundewereld zijn mondje wel geroerd zou hebben. Dit examen is geluidloos gepasseerd. Hoe kan dat?

Geheimhouding

Een belangrijke oorzaak is naar mijn idee de geheimhoudingsplicht van de digitale examens. Uiteraard overleggen we op school met collega's onder elkaar over antwoorden van leerlingen waar we twijfels bij hebben en correctoren kunnen opmerkingen sturen naar het CvTE. Het examen als geheel wordt echter niet met collega's besproken.
Een oorzaak is dat de digitale examens uit vele varianten bestaan die op verschillende momenten worden afgenomen.



figuur 6 Uit: vmbo BB h1 (Kaarsen)

IJsselmeertocht

Vanaf Urk zeilen Bart en Willy terug naar Enkhuizen.
De schaal van de kaart is 1 : 625 000.

Bereken hoeveel kilometer Bart en Willy moeten zeilen van Urk naar Enkhuizen.
Typ je berekening in.

Je mag ook gebruik maken van de verhoudingstabel.

» Als je gebruik maakt van de verhoudingstabel, typ dan alleen je antwoord in het vak **Berekening**.

Verhoudingstabel

Opnieuw

Berekening

figuur 7 Uit: vmbo BB h1 (IJsselmeertoch)

Met de collega's op andere scholen discussiëren over de samenstelling van het examen (de opgaven 9, 10 en 12 komen vrijwel letterlijk uit de toetsen van *Moderne Wiskunde*), de vraagstellingen ('Geef aan wat er daardoor met de grafiek van de winst gebeurt', vraag 17), contexten (hoeveel leerlingen in de basisberoepsgerichte leerweg zullen bekend zijn met het begrip *creditcard*, opgave 21) en de beperkingen die de digitale afname de leerling oplegt, is door de geheimhoudingsplicht niet mogelijk. Het CvTE heeft door het openbaar maken van dit examen en de toezegging in de toekomst meer examens openbaar te maken een stap in de goede richting genomen. Dat neemt niet weg dat dit examen laat zien dat democratische controle vanuit het onderwijsveld op alle examens noodzakelijk is. Ook digitale examens dienen om die reden na afname openbaar te zijn. Dat dit voor de CvTE en Cito problemen oplevert bij de normering van het examen is duidelijk maar het is aan hun om dit probleem op een andere wijze dan geheimhouding op te lossen.

Wiskunde docenten BB en KB

De tweede belangrijke oorzaak van het geluidloos passeren van dit examen moeten we bij onszelf zoeken. Binnen de NVvW zijn de docenten die lesgeven op de havo en het vwo sterk vertegenwoordigd. In *Euclides* is volop aandacht voor ontwikkelingen die betrekking hebben op deze vormen van onderwijs. Dat ziet er voor het vmbo anders uit. Voor en door docenten uit de beroepsgerichte leerwegen van het vmbo is er weinig activiteit te bespeuren. Leerlingen in de BB en KB leerwegen hebben recht op kwalitatief goed wiskundeonderwijs en goede examens. Dat vraagt niet alleen openbaarheid van examens maar ook een actieve groep docenten die ontwikkelingen kritisch volgen en zelf initiatieven neemt.
Op de evaluatiemiddag van 19 november werd duidelijk dat de oefentijd met digitale examens op veel scholen beperkt is. Eén of hooguit twee keer achter de computer is vaak het maximum terwijl de CvTE er naar mijn mening terecht van uit gaat dat de leerlingen voldoende met de proefexamens hebben kunnen oefenen. Als individuele docent krijg je dat op je school maar moeilijk voor elkaar. Vmbo-BB en -KB docenten zijn ook lid van de NVvW en kunnen zich dus samen met de NVvW sterk maken voor een beter examen en voldoende oefentijd voor de leerlingen. Ik nodig jullie hierbij uit mee te denken over hoe we dat aan kunnen pakken en zie jullie reacties met belangstelling tegemoet.

Rekenen met de euro

Op vakantie moet er ook wel eens geld gepind worden.
Meneer Janssen pinde in Italië in totaal € 1250,- met zijn creditcard.
De creditcard-maatschappij berekende daarover 3% kosten.

Bereken de kosten in euro die meneer Janssen aan de creditcard-maatschappij moet betalen.
Typ je berekening in.

figuur 8 Uit: vmbo BB h1 (Rekenen met de euro)

Over de auteur

Ruud Jongeling heeft ruim twintig jaar ervaring als wiskundedocent in het VSO-LOM en vmbo onderwijs. Hij is werkzaam bij het Da Vinci College in Roosendaal, een school voor de beroepsgerichte leerwegen in het vmbo en het praktijkonderwijs. Van 2009 tot 2012 was hij lid van de vaststellingscommissie voor de centraal examens wiskunde vmbo van de toenmalige CvE.
E-mailadres: *rj.jongeling@kpnmail.nl*

ADV MORAVIA

WISKUNDE D IN DE VERDRUKKING?

Frits Beukers
Johan Gademan

Onlangs, in december 2015, is de pilot Wiskunde D Online positief geëvalueerd. Dat betekent dat het project nu open staat voor alle scholen waar minder dan tien leerlingen zijn die graag wiskunde D willen kiezen. Frits Beukers en Johan Gademan houden een gloedvol pleidooi voor wiskunde D in het algemeen en het project Wiskunde D Online in het bijzonder.

Introductie

Het havo/vwo vak wiskunde D is een vak met een bijzondere status. Ooit is het ingevoerd ter compensatie van de urenreductie (SLU) bij wiskunde B die in 2007 plaatsvond. Maar, in tegenstelling tot wiskunde A en B, behoort het voor geen enkele vervolgopleiding tot de toelatingseisen. Dit maakt het tot speelbal van allerlei krachten en op veel scholen wordt het vak zelfs niet gegeven. Dat is jammer voor belangstellende leerlingen, de gemotiveerde docenten, en het extra wiskundeniveau dat het oplevert. In dit stuk bespreken we kort waarom het vak gesteund zou moeten worden, hoe je dit zou kunnen doen, en de ontwikkeling rond het project Wiskunde D Online dat onlangs gestart is.

Waarom wiskunde D?

Mede door de speciale status heeft het vak een aantal duidelijke pluspunten:

- het is een mooi en leuk vak;
- leerlingen leren op een andere manier omgaan met wiskunde;
- leerlingen leren nog meer al hun opgedane kennis te gebruiken bij dit vak;
- het daagt leerlingen op een andere manier uit (sommige leerlingen zijn beter in wiskunde D dan in wiskunde B);
- in dit vak zit al een (klein) stukje materiaal van de universiteit, zodat leerlingen meer inzicht krijgen in hun mogelijke vervolgstudies;
- het vak kan op verschillende manieren getoetst worden (een paar opdrachten passen goed binnen het curriculum);
- de docent kan (gedeeltelijk) eigen inbreng geven aan dit vak;
- het is een extra keuzemogelijkheid in het bèta gebied.

Volgens een wiskunde D docent: ‘Ik ben zelf een groot voorstander van wiskunde D omdat ik leerlingen hiermee extra kan stimuleren in hun bèta achtergrond. Ik laat ze al een beetje kennismaken met stof en de manier van denken op de universiteit. Ik laat ze opdrachten maken en veel dingen zelf uitzoeken. Het klassengesprek komt goed op gang en ze hebben er veel plezier in. Er komen veel onderwerpen aan bod, en ik kan verschillende werkvormen hier in kwijt.’

Verder kan een school er ook trots op zijn als het wiskunde D aanbiedt, zelfs al is het voor een klein aantal leerlingen. Uit een vergelijkend onderzoek met Vlaanderen en Duitsland (NRW) blijkt bijvoorbeeld dat het Nederlandse wiskunde B-onderwijs zoals dat nu is, significant achterloopt in uren en hoeveelheid stof. Samen met wiskunde D blijkt het gezamenlijke pakket de vergelijking met het buitenland goed te kunnen doorstaan.

Hoe stimuleer je wiskunde D?

Ook op scholen waar het aanbod onder druk staat zijn er mogelijkheden het vak te behouden. In de eerste plaats helpt het maken van reclame in de onderbouw, zodat de mogelijkheid om wiskunde D te volgen in de bovenbouw duidelijk naar voren komt. Maar als ondanks dat het aantal leerlingen klein blijft, zijn er alternatieve vormen te bedenken. Bijvoorbeeld:

- verschillende jaarlagen samenvoegen in één groep;
- in klas 4 vwo krijgen alle wiskunde B leerlingen een extra module statistiek en kansrekening. Op deze manier kan wiskunde D aangeboden worden in klas 5 en 6. Er is een groep met leerlingen van klas 5 en 6;
- werk samen als scholen, voorbeelden zijn de E-klassen in Amsterdam en ook een kleinere samenwerking in Zuid-Limburg;
- neem deel aan het project *Wiskunde D Online*, hierover in de volgende paragraaf meer.

Wiskunde D Online

Per augustus 2015 is Wiskunde D Online gestart. Daarin doen de leerlingen vooral in zelfstudie met online ondersteuning Wiskunde D. De opzet functioneerde al een paar jaar voor een tiental scholen, voornamelijk in het noorden van het land, waarbij de ondersteuning werd geboden door de RUG. Het initiatief van de RUG is opgegaan in Wiskunde D Online. En Wiskunde D Online is nu landelijk beschikbaar en wordt momenteel ondersteund door vier steunpunten: Groningen, Amsterdam, Enschede en



figuur 1

Delft/Leiden. Voor het schooljaar 2016-2017 hebben ook andere steunpunten interesse getoond.
Voor Wiskunde D Online is er een digitale leeromgeving (*http://portal.ou.nl/web/wiskunde-d-online*). Hierop is de leerstof van Wiskunde D opgesplitst in een aantal blokken van ieder steeds vier weken. Iedere week bekijkt de leerling een videoles (zie figuur 1), bestudeert de leerteksten en maakt de bijbehorende opgaven. Maar misschien wel het belangrijkste is dat de leerling iedere week huiswerk maakt, en dat opstuurt. Het huiswerk wordt nagekeken op de steunpunten, en de leerling krijgt terugkoppeling op zijn gemaakte werk. Het huiswerk staat ook op de digitale leeromgeving, maar is alleen zichtbaar voor deelnemende leerlingen.

Na afloop van een blok moet er een toets gemaakt worden. Dat gebeurt op hun eigen school, en wordt georganiseerd door een leraar van de school. Immers, de school en de leraar blijven verantwoordelijk voor de beoordeling.
Deelname aan Wiskunde D Online is mogelijk voor scholen met klassen wiskunde D waarin maximaal tien leerlingen zitten. Immers, als er meer leerlingen zijn, dan is het beter dat de school er voor kiest het vak via de gewone lessen te organiseren. Wiskunde D Online is alleen bedoeld voor die scholen waar er eigenlijk te weinig leerlingen zijn om het (financieel) verantwoord aan te kunnen bieden.
In schooljaar 2015/16 is Wiskunde D Online nog een pilot en alleen voor 4 vwo, terwijl deelname gratis is. Deze pilot is in het najaar van 2015 positief geëvalueerd onder docenten en leerlingen. Daarom wordt Wiskunde D Online voortgezet in het schooljaar 2016-2017 voor 4 vwo en uitgebreid naar 5 vwo. Voor iedere leerling die dan deelneemt, zal van de scholen 150 euro als financiële bijdrage worden gevraagd. Aanmelding voor deelname kan via *wiskundedonline@ou.nl*.
Tot slot nog een citaat van een wiskunde D-docent: ‘Ik zou het voor de leerlingen (en mijzelf) heel jammer vinden als dit vak ten onder gaat. Het is een fantastisch vak om te geven en te krijgen.’

Over de auteurs

Frits Beukers is hoogleraar wiskunde aan de Universiteit Utrecht en voorzitter van de commissie onderwijs van PWN. E-mailadres: *f.beukers@uu.nl*. Johan Gademan is namens SLO projectleider van Wiskunde D Online. E-mailadres: *jgademan@gmail.com*.

MEDEDELING

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE



Op 11 maart vond de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats op twaalf universiteiten. De opgaven en uitwerkingen zijn inmiddels gepubliceerd op *www.wiskundeolympiade.nl*.
Ongeveer 1000 leerlingen waren uitgenodigd voor de tweede ronde. De leerlingen deden mee in drie categorieën: onderbouw, vierde klas en vijfde klas. Per categorie zullen ongeveer 40 leerlingen uitgenodigd worden voor de finale in september. Wie deze winnaars van de tweede ronde zijn, wordt begin april bekend gemaakt.

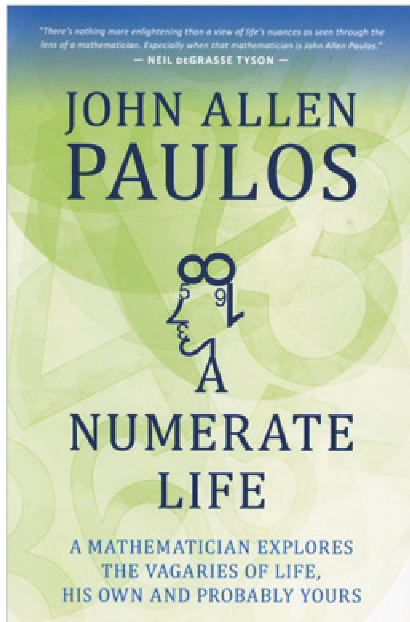
GECIJFERDHEID

Kees Hoogland

In deze interactieve rubriek belicht Kees Hoogland aspecten van gecijferdheid. Deze keer: er is een nieuw boek uit van John Allen Paulos.







Wie zich verder verdiept in gecijferdheid komt vroeg of laat de naam tegen van John Allen Paulos, wiskunde-professor aan de Temple University in Philidelphia. Zijn eerste boek *Innumeracy, Mathematical illiteracy and its consequences* (Ongecijferdheid – De gevolgen van wiskundige ongeletterdheid) is nog steeds te koop en ook nog steeds uiterst lezenswaardig. In 1988 was het een wereldwijde bestseller omdat het met veel humor en messcherpe analyses blootlegde hoe moeilijk het voor veel mensen is om allerlei kwantitatieve beweringen op waarde te schatten. Hij zelf benoemt het als *the layperson's misconceptions about numbers, probability and logic.* Zijn vele voorbeelden gaan over ongrijpbaar grote getallen en heel kleine kansen, over fouten in logische uitspraken, en over de flaters in uitspraken in het publieke debat, maar ook in krantenartikelen en beleidsdocumenten.

Het boek maakte vooral grote indruk omdat Paulos liet zien dat ongecijferdheid niets te maken heeft met opleidingsniveau of cognitieve capaciteiten. Zelfs succesvolle academici uit allerlei verschillende disciplines doen zich in zijn voorbeelden gelden als ongecijferd. Rudy Kousbroek noemde dit in het nawoord bij de Nederlandse vertaling *kunstmatige domheid*: goed opgeleide mensen die op verjaardagen koketteren met hun eigen onvermogen om ook maar iets met getallen te (willen) snappen.

Net verschenen

Net verschenen van de inmiddels 70-jarige Paulos is zijn negende boek over dit thema: *A numerate life – A mathematician explores the vagaries of life, his own and probably yours*. De meeste van zijn boeken, zoals *Een wiskundige leest de krant, Een wiskundige op de beurs*, en *Een getallenman* zijn vertaald in het Nederlands en deze zal vast ook snel volgen. Het is een uiterst leesbaar boek dat veel wegheeft van een autobiografie. Echter zonder enige zelfverheerlijking of borstklopperij. Deze wiskundige reflecteert op zijn ervaringen op tal van gebieden van zijn eigen leven.

Gecijferdheid en onderwijs

Paulos schrijft ook al twintig jaar een wekelijkse column voor *ABC-news*: *Who's counting*. Bijna elke column kan al aanleiding zijn voor een klassengesprek of bron van inspiratie om eens gecijferd naar het huidige nieuws in onze kranten te kijken. (zie *abcnews.go.com* en zoek Paulos)
Paulos volgend zou het in alle reken- en wiskundeprogramma's een verplicht onderdeel moeten zijn leerlingen te leren kritisch te kijken naar hoe zij zelf en anderen omgaan met kwantitatieve redeneringen. En dat kan al heel simpel in spelletjes, bij beslissingen waarbij keuzes gemaakt moeten worden of bij als-dan redeneringen. Maar ook door kritisch met leerlingen naar getallen, grafieken en tabellen uit de krant te kijken.
Destijds bij de invoering van wiskunde A op vwo (1985) en havo (1988) en het nieuwe programma voor vmbo (1992) werd nog nadruk gelegd op de wenselijkheid om zo'n kritische blik bij leerlingen te ontwikkelen. Wat is er toch de afgelopen vijftien jaar gebeurd in ons reken- en wiskundeonderwijs? Wanneer is zo'n functionele en inspirerende kijk op rekenen en wiskunde afgegleden naar de roep om breukensommetjes, staartdelingen en verplichte rekentoetsen zonder rekenmachine?
Mijn pleidooi is: lezen dat nieuwe boek van Paulos en gebruik zijn columns voor *ABC-news* in de klas. Ik zal wat aanzetten doen op de website *gecijferdheid.nl*. Ik hoor graag uw ervaringen.

Over de auteur

Kees Hoogland is vakexpert rekenen, wiskunde, gecijferdheid bij SLO. Website: *www.gecijferdheid.nl*, E-mailadres: *cph@xs4all.nl*

BOEKBESPREKING

MET PASSER, LINIAAL EN NEUSISLAT



Jenneke Krüger



Auteurs: Ad Meskens en Paul Tytgat
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2015), Zebrareeks, deel 41
ISBN: 978-90-5041-144-8
Prijs: € 10,00 (68 pagina's; paperback)

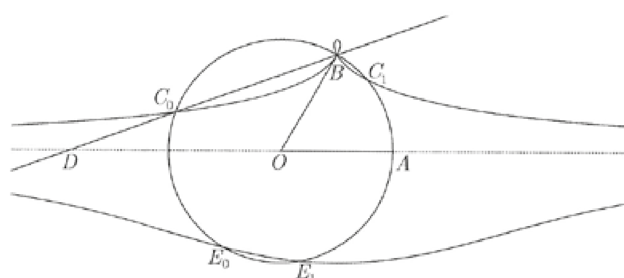
Een hulpmiddel voor 'onmogelijke' constructies

Hulpmiddelen om lastige wiskundige problemen via een omweg toch op te lossen zijn van alle tijden (gefronste wenkbrauwen over die moderne middelen vermoedelijk ook). Een *neusis* is een voorbeeld van zo'n techniek om voor een constructieprobleem zoals de verdubbeling van een kubus, onoplosbaar met gebruik van alleen passer en rechte lat, toch een correcte oplossing te vinden.
Een neusis is een lijnstuk van een af te meten lengte, dat tussen twee lijnen ingepast wordt; een neusislat is een fysiek hulpmiddel om met een neusis te werken. *GeoGebra* levert de digitale versie van een neusis(lat). Ook krommen, zoals een conchoïde, zijn met een neusis construeerbaar.
Dit deeltje in de Zebrareeks behandelt twee klassieke problemen uit de klassieke Griekse periode toen constructies met alleen passer-en-lat in hoog aanzien stonden: de verdubbeling van de kubus en de driedeling van de hoek. Als een soort toegift besteden de auteurs ook aandacht aan construeerbare getallen en theorie van vergelijkingen, met behulp waarvan ze nog eens laten zien dat beide klassieke problemen geen oplossing via constructie met passer-en-lat hebben.
Beide problemen zijn wel oplosbaar als er andere hulpmiddelen gebruikt worden, bijvoorbeeld een liniaal met maatverdeling, een neusis-instrument van karton of hout of *GeoGebra*.

Zowel de klassieke constructies met passer-en-lat (de auteurs gebruiken passer-en-liniaal, maar de meeste leerlingen kennen alleen een liniaal met maatverdeling) als de andere methoden komen herhaaldelijk aan bod. Leerlingen ervaren zo dat er verschillende methoden zijn om een probleem op te lossen.
Het boekje is activerend geschreven: de auteurs leggen bepaalde constructies uit en nodigen uit om het zelf ook te proberen. Er staan 37 genummerde opdrachten in, globaal te verdelen in constructies met passer-en-lat, bewijs/toon aan, gebruik van een fysiek, zelf te maken, neusisinstrument en gebruik van *GeoGebra*. Ik vermoed dat veel leerlingen de neusis-opgaven voor kennisgeving zullen aannemen, maar voor leerlingen die het leuk vinden om iets zelf te maken, vormen ze een mooie uitdaging.

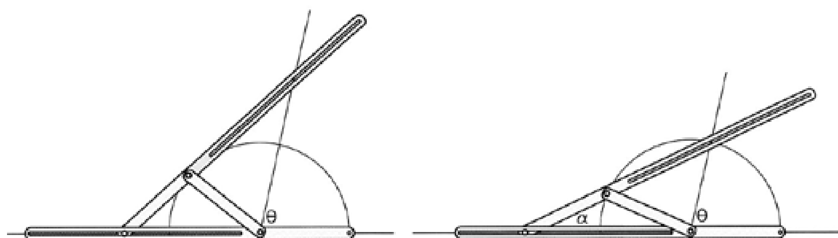
Korte inhoud van de hoofdstukken

Het eerste hoofdstuk geeft een korte inleiding op de twee problemen en een beknopte behandeling van *GeoGebra* en van poolcoördinaten. Leerlingen die nooit met *GeoGebra* gewerkt hebben, zullen wat meer oefening nodig hebben, maar dat zal geen grote problemen opleveren. Hoofdstuk twee behandelt kort de periode van Thales, Plato en Euclides. De auteurs noemen de drie klassen meetkundige constructies, toegeschreven aan Plato, met voorbeelden. Ze leggen niet uit waarom deze indeling hiërarchisch was. De neusisliniaal en neusislat worden gebruikt voor een constructie uit de derde klasse, dezelfde constructie wordt met *GeoGebra* uitgevoerd. Het hoofdstuk sluit af met de Elementen van Euclides en een aantal voorbeelden van constructies met passer-en-lat, leerlingen mogen aantonen dat de constructies correct zijn.
Hoofdstuk 3 en 4 behandelen respectievelijk de verdubbeling van de kubus en de driedeling van een hoek. De verdubbeling van de kubus, een constructie gekoppeld aan een derdegraadsvergelijking, wordt herleid tot het oplossen van een stelsel van twee kwadratische vergelij-



figuur 1

figuur 2



kingen. De leerlingen moeten de gelijkwaardigheid van de verschillende vergelijkingen en evenredigheden aantonen en gaan daarna met *GeoGebra* aan de slag. Vervolgens komt er een oplossing met behulp van een winkelhaak en een met gebruik van een neusislat. De oplossing met neusislat wordt met *GeoGebra* uitgevoerd. De conchoïde van Nicomedes is het resultaat van een uitgevoerde *GeoGebra* constructie en vormt een overgang naar de oplossing voor de driedeling van een hoek, zie figuur 1. Voor de driedeling van een hoek werken de leerlingen dus met de conchoïde van Nicomedes en met twee oplossingen die de naam van Archimedes dragen. Eén oplossing met gelijkbenige driehoeken en een oplossing met een Archimedische spiraal, zie figuur 2 en 3. Steeds met gebruik van een neusis en van *GeoGebra* en leerlingen moeten altijd aantonen dat de oplossing correct is.

Hoofdstuk 5 behandelt construeerbare getallen en de relatie tussen construeerbare getallen en rationale oplossingen van vergelijkingen. Hier vragen de auteurs de leerlingen wortelvormen te ontbinden en ze werken met goniometrische formules. De afsluitende opdracht gaat over de constructie van een regelmatige zevenhoek.
Het is prettig dat voor elk vraagstuk achterin een oplossing opgenomen is, al zullen leerlingen ook wel eens een andere weg naar een oplossing vinden. In de appendix zijn enkele definities en eigenschappen opgenomen met betrekking tot vlakke meetkunde, maar niets over goniometrie.

Wat schoonheidsfoutjes

Enkele slordigheden en onduidelijkheden zijn kennelijk over het hoofd gezien. Op pagina 7 staan drie stelsels van twee vergelijkingen die niet genummerd zijn. Dat maakt verwijzingen in de tekst voor leerlingen voor wie dit onderwerp nieuw is, verwarrend. In de oplossing van opgave 24 is *A*′ veranderd in *C*′, zodat de bijbehorende tekening niet meer klopt. In figuur 4.6 zijn de twee afbeeldingen niet gelabeld. Daardoor staan in de tekst uitdrukkingen zoals ‘de lange lat waarlangs de ander schuift’ en ‘de andere scharnier’. Niet erg helder.

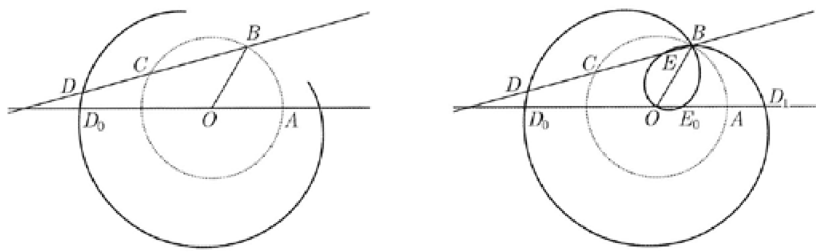
Conclusie

Ondanks wat kleine gebreken, is deze uitgave voor leerlingen die in meetkunde geïnteresseerd zijn een waardevolle aanwinst. Het biedt een beknopte en praktische inleiding in een stuk geschiedenis van meetkunde en laat ervaren hoe met oude en met moderne hulpmiddelen dezelfde resultaten bereikt kunnen worden.
Dit onderwerp sluit aan bij het examenprogramma voor vwo wiskunde D (2015), met vlakke meetkunde en poolcoördinaten. Voor vwo leerlingen die alleen wiskunde B volgen, zijn de onderwerpen nieuw. Het boekje lijkt, gezien de verschillende technieken die gebruikt worden, goed geschikt om in twee- of drietallen door te werken. Het biedt tevens een uitgangspunt voor enige verdieping in een belangrijke periode van de geschiedenis van wiskunde.

Over de auteur

Jenneke Krüger werkte in het voortgezet onderwijs als docent natuurwetenschappen en wiskunde, onder meer in bovenbouw havo en vwo. Ze was tien jaar leerplanontwikkelaar bij SLO en promoveerde in 2014. Het proefschrift behandelde een aantal actoren en factoren die van belang waren voor het Nederlandse wiskundecurriculum sinds 1600. Ze houdt zich nu freelance bezig met onderzoek ten behoeve van onderwijs in wiskunde, natuurwetenschappen en informatica en met de geschiedenis van dit onderwijs.
E-mailadres: *jenneke.kruger@gmail.com*

figuur 3

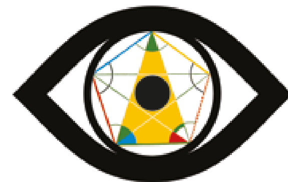


GETUIGEN

VLUCHTENDE JUFFERTJES

Danny Beckers

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.



Omdat we nu eenmaal zijn opgegroeid in een tijd waarin het vanzelfsprekend is dat we naar school gaan en wiskundeles krijgen heeft iedereen een – al dan niet positief, al dan niet reëel – beeld van wat wiskunde is. De wiskundige en de wiskundedocent hebben een publiek beeld dat we terug kunnen zien in populaire films en boeken. In die populaire weergaven worden bepaalde kenmerken van het publieke beeld natuurlijk uitvergroot om de herkenbaarheid te vergroten. Denk aan de verstrooide professor Barabas. Die verstrooidheid heeft geen betrekking op een realiteit, maar wordt eerder op de realiteit geprojecteerd, wanneer het verstrooide jongetje in de klas 'professor' wordt gedoopt.

Een dergelijk populair beeld treffen we ook aan in het achttiende-eeuwse toneelstuk *De wiskunstenaars of het gevluchtte juffertje* van Pieter Langendijk (1683-1756). Langendijk was een populaire dichter en toneelschrijver die bij het achttiende-eeuws publiek geliefd was. In de achttiende eeuw werden zijn werken vele malen opgevoerd en herdrukt.

De *Wiskunstenaars of het gevluchte juffertje* publiceerde Langendijk in 1715. Het betrof een klucht over de mooie Izabelle, die door haar voogd, de heer Anzelmus, was uitgehuwelijkt aan zijn neef Raasbollius. In het geniep hadden Izabelle en de heer Eelhart elkaar echter al trouw beloofd. Izabelle, die van de plannen van haar voogd hoorde, is samen met haar trouwe meid Katrien weggevlucht en overnachtte in een herberg. Zoals in dit soort toneelstukken gebruikelijk, overnachtten bij toeval ook Eelhart en Anzelmus in diezelfde herberg, die laatste omdat hij uit bezorgdheid op zoek was gegaan naar Izabelle. Anzelmus werd vergezeld door zijn neef, de



figuur 1 *De wiskunstenaars of 't gevluchte juffertje, het dispuut van de doktoren Raasbollius en Urinaal,* Cornelis Troost (1696-1750), copyright Mauritshuis, Den Haag

gevreesde huwelijkskandidaat. In de herberg overnachtte daarnaast ook nog dokter Urinaal. De avond was gevallen, de stadspoorten waren dicht, dus er zat niets anders op dan elkaar niet herkenbaar tegen te komen in de herberg.

De wiskundigen uit de titel waren Raasbollius en Urinaal. Zij vormden een komische achtergrond waartegen het verhaal zich ontwikkelde. Ze scholden op elkaar en namen elkaar de maat, terwijl er voortdurend wiskundige termen werden genoemd, en dat allemaal op rijm! Een korte sfeerimpressie:

Raasbollius
'k Loof dat gy nooit geen spheer of globus hebt gezien.
Weet gy wat sinus is, of tangens?

Urinaal
Ja.

Raasbollius
Misschien.
Den klootsen driehoek, vriend, weet jy die te berekenen?

Urinaal
Jy weet van de Algebra, zo min als hemeltekenen!

De beide wiskundigen hadden uitvindingen gedaan in de verdedigingskunst. Raasbollius was erg trots op zijn met veren uitgeruste vestingmuren, die elke kanonskogel die erop wordt afgeschoten weer terugschoot op de vijand. Het was uiteindelijk ook de reden dat hij meende schatrijk te gaan worden. Voor zijn toekomstige echtgenote had hij in het geheel geen aandacht, zodat Anzelmus langzaamaan begon te twijfelen waarom hij zijn neef had meegenomen.

Het meest in het oog springend was het debat tussen de beide wiskundigen over de aard van ons zonnestelsel. Dokter Urinaal volgde de leer van Copernicus, die de zon in het centrum van ons zonnestelsel postuleerde. Dokter Raasbollius daarentegen, was juist een aanhanger van het geocentrisch wereldbeeld van Ptolemaeus. De discussie die zich daarover ontspon was zowel voor degenen die plezier beleefden aan filosofie als voor degenen die daar geen kennis van hadden, grappig om te volgen. Alle standaardfouten in filosofische gevolgtrekkingen passeerden de revue. Voor de 'gewone' man, aan wie het nut van een dergelijke discussie voorbij ging, was de scene leuk omdat die zich afspeelde in de gelagkamer van de herberg, waar twee mensen probeerden te eten, terwijl alle schalen met voedsel steeds voor hun neus werden weggehaald door de wiskundigen die er hun theorieën mee illustreerden.

De Amsterdamse schilder Cornelis Troost (1696-1750) maakte er in 1741 deze pasteltekening bij – vandaag de dag nog te bekijken in het Mauritshuis te Den Haag. Het is ook in een ets verwerkt die bij een aantal heruitgaven van het toneelstuk werd afgedrukt. Op de afbeelding is de ruzie tussen Raasbollius en Urinaal te zien. Zichtbaar zijn de krijtcirkels op de vloer, de eetschalen en wijnflessen om de zon, om aarde en maan te verbeelden. Een aardig detail zijn de portretten die boven de deur hangen, waarop de namen en beeltenissen van Copernicus en Ptolemeus herkenbaar zijn. Op het werk van Troost gebruikten beide wiskundigen overigens een wijnfles om de aarde te representeren.

Het bestaan van het toneelstuk, het pastel en de verschillende geïllustreerde edities van *De wiskunstenaars*, tonen aan dat de wiskundige in achttiende-eeuws Nederland een publieke figuur was. De mensen die het toneelstuk waardeerden herkenden de karikaturen – anders zouden ze het niet grappig hebben gevonden. Die wiskundige was veelal een rekenmeester, een landmeter of een vestingbouwkundige. Nog vaker alle drie tegelijk. De landmeters, navigators en vestingbouwers in Amsterdam gaven ook les: soms op verzoek, vaak ook als standaard neveninkomsten. Er zijn contracten bekend van wiskundigen die oplossingen verkochten van opgaven. Velen schreven lesboeken. In het openbaar werd om de gunst van leerlingen reclame gemaakt: soms door te pochen over wat men kon, soms domweg door de naam van concurrenten te besmeuren. De wiskundigen van Langendijk waren gebaseerd op deze voor het publiek herkenbare beelden van de beroepsgroep.

Ter geruststelling: de wiskunstenaars kwamen er dan misschien bekaaid vanaf, het verhaal had voor het juffertje een goed einde. Tijdens de avond in de herberg leerde Anzelmus zijn neef kennen. Na de discussie zag Anzelmus in dat Izabelle niet met deze man moest trouwen, Eelhart introduceerde zich als een betrouwbare huwelijkskandidaat en zo kwam uiteindelijk alles toch nog goed.

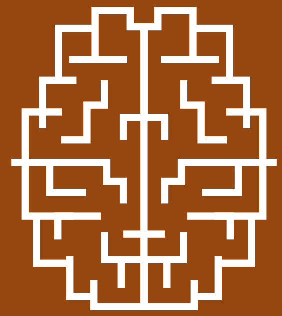
Van de toneelstukken van Langendijk die nog sporadisch worden opgevoerd is het toneelstuk over het vluchtende juffertje tegenwoordig de minst populaire. Het is ook een lastig stuk, dat minder toegankelijk is, juist omdat de beelden van de wiskundigen veel minder herkenbaar zijn en omdat een vertaling in hedendaags Nederlands veel van oorspronkelijke charme (rijm en metrum) verloren zal doen gaan. Mocht u overwegen om het op te voeren, dan kom ik graag auditie doen voor de rol van één van de wiskundigen!

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs.
E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*

PUZZEL 91-5

ERDÖS-GYÁRFÁS VERMOEDEN

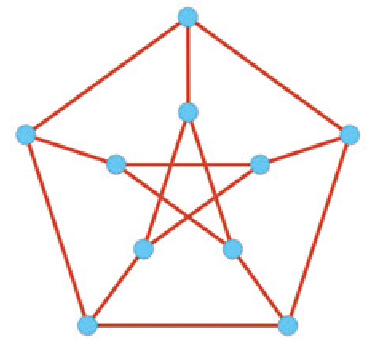


Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Deze puzzel gaat over het vermoeden bekend onder de naam Erdős-Gyárfás:

Elke graaf met een minimum graad van 3 bevat altijd een cykel met lengte 2^k. Een mogelijk tegenvoorbeeld met n punten duiden we hier aan met $T(n)$. $T(n)$ zal dus geen meervoudige lijnen bevatten ($k = 1$) en geen lussen (= lijn van een punt naar zichzelf, dus $k = 0$).

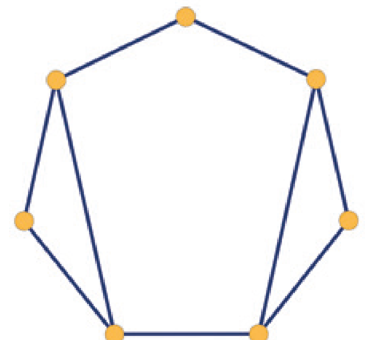
Bij een minimum graad van 3 geldt: elk punt is met minstens drie andere punten rechtstreeks verbonden.
Een cykel is een pad van een punt naar zichzelf, dat in elk punt van dat pad precies één keer vertrekt en één keer aankomt. De lengte is het aantal lijnen (of punten) in die cykel.



figuur 1

Tot nu toe is het Erdős-Gyárfás vermoeden niet bewezen of weerlegd. Wel werd aangetoond met de computer dat er geen tegenvoorbeelden zijn met minder dan 17 punten. Een bekend voorbeeld van een graaf met alle punten graad 3 is de Petersen-graaf, zie figuur 1. Ga na dat deze cykels bevat van lengte 8.

We gaan u uiteraard niet vragen het vermoeden te bewijzen of te weerleggen, maar wel onderzoeken we een aantal eigenschappen waaraan een mogelijk tegenvoorbeeld T(n) zou moeten voldoen.
Stel: de graaf $T(n)$ is een tegenvoorbeeld. T bevat dus n punten, geen cykels van lengte 2^k en elk punt heeft minstens graad 3. De eerste vraag is eenvoudig, maar essentieel voor de volgende vragen. We veronderstellen daarbij dat T bestaat voor een zekere n.
Opgave 1 – Toon aan: $T(n)$ bevat altijd cykels, maar niet elk punt hoeft in een cykel te liggen.



figuur 2

We kunnen wel grafen maken zonder cykels met lengte 2^k waarin een beperkt aantal punten (m) graad 2 heeft en de rest 3 of hoger. Zie figuur 2 voor een voorbeeld met $n = 7$ en $m = 3$.
Opgave 2 – Bepaal de kleinste waarde van m voor grafen met 5, 6, 8 en 9 punten.

Als we een tegenvoorbeeld $T(n)$ hebben, kunnen we altijd door handig meerdere grafen aan elkaar te koppelen, verschillende tegenvoorbeelden construeren met grotere n.

Stelling: Als er een tegenvoorbeeld $T(n)$ bestaat, dan bestaat er een i, waarvoor geldt:
Voor alle $j \geq i$ is er een tegenvoorbeeld $T(j)$ te construeren.
Opgave 3 – Bewijs deze stelling. U hoeft hierbij niet te streven naar een zo klein mogelijke i.

We gaan nu op zoek naar een zo ‘zuinig’ mogelijke afschatting van de waarde i uit bovenstaande stelling, als functie van n. Als vingeroefening gaan we voor een paar waarden van n een zo klein mogelijke i bepalen. De functie is natuurlijk niet echt zinvol voor waarden van n waarvoor we zeker weten dat er geen tegenvoorbeelden kunnen bestaan, zoals voor $n < 17$. Toch kunnen we die functie op die waarden wel definiëren door (imaginaire) objecten $T(n)$ te introduceren met alle eigenschappen van een tegenvoorbeeld.
Opgave 4a – Veronderstel dat zo’n object $T(7)$ bestaat. Bepaal dan een zo klein mogelijke waarde van i, zodat voor elke $j \geq i$ zo’n object $T(j)$ bestaat. Dezelfde vraag stellen we voor $n = 17$.

Een graaf met n punten en $m = 1$ noemen we een half tegenvoorbeeld. Als we er daarvan twee aan elkaar koppelen krijgen we echte tegenvoorbeelden $T(2n–1)$ of $T(2n)$. Bij opgave 2 zal u dus geen $m = 1$ hebben gevonden, of u heeft de eer het vermoeden van Erdős-Gyárfás te hebben verworpen.
Omdat we hiermee het vermoeden van Erdős-Gyárfás kunnen aanscherpen, kun je je ook afvragen of dat invloed heeft op de antwoorden van vraag 4a.
Opgave 4b – Hoe zit het als de $T(7)$ respectievelijk $T(17)$ uit opgave 4a geen echte maar halve tegenvoorbeelden zijn en de $T(j)$'s wel echte tegenvoorbeelden?
Extra voor de liefhebbers: bepaal een zo 'zuinig' mogelijke functie $i = F(n)$ zoals hierboven beschreven.

Inzenden oplossingen

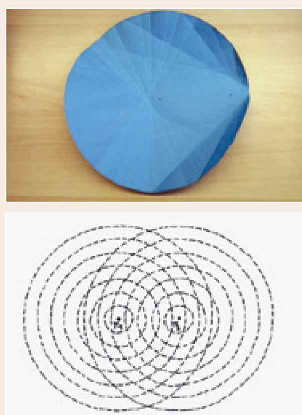
Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En u hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch boven aan de ladder te komen! Inzendingen moeten uiterlijk op 20 april 2016 binnen zijn.

KLEINTJE DIDACTIEK

ANALYTISCHE MEETKUNDE

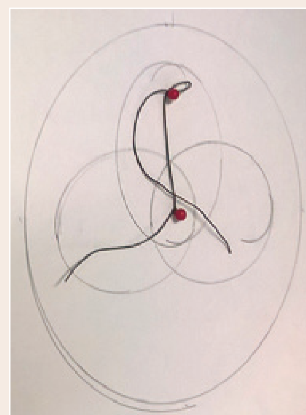
Had u wel eens de ervaring dat leerlingen de stof ineens veel beter 'in hun vingers' kregen nadat u ze een les had laten knippen, plakken of vouwen? Zelf had ik die ervaring het sterkst toen ik – geïnspireerd door een artikel van Jeanine Daems – de parabool had gevouwen als verzameling van raaklijnen in mijn wiskunde D-klas. Dat gaat zo: de onderkant van je vouwblaadje (of A4), is je richtlijn. In het midden van je vouwblaadje, een paar centimeter boven de onderkant, zet je een stip. Dit wordt je brandpunt. Neem nu een willekeurig punt op de richtlijn en vouw dit punt precies op je brandpunt. Dit herhaal je met verschillende punten op de richtlijn en zo ontstaat de parabool uit de verzameling van raaklijnen. Ik heb - net als Jeanine – daarvoor vouwblaadjes gebruikt.
Marjan Botke en Rob van Oord gaven op de studiedag van de vereniging in november 2015 een workshop over dit onderwerp waarbij ze ruitjespapier gebruikten om de parabool te vouwen. Het leuke daarvan is dat je – bij handige keuze van de punt, bijvoorbeeld vier centimeter van de rand – ook de formule van de parabool kunt opstellen zoals Rob van Oord met zijn klas deed. In een andere les heb ik leerlingen de ellips laten vouwen. Dit gaat op een vergelijkbare manier als de parabool: je neemt een punt op de conflictlijn (in dit geval is dat een cirkel) en je vouwt dit punt naar het brandpunt van je ellips (een willekeurig punt binnen de cirkel), zie figuur 1.
In de *Wageningse Methode* (editie 2007) vond ik in de boeken van wiskunde B nog twee manieren om de ellips te construeren (analytische meetkunde is daar een keuzeonderwerp). De eerste is de 'touwtjesmethode' die al in de zesde eeuw werd gebruikt door bouwlieden en veel door tuinaanleggers wordt gebruikt. In de klas

figuur 1



figuur 3

figuur 2



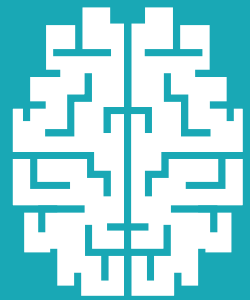
hebben we hiervoor twee spelden in piepschuim gestoken waarop een stuk karton was vastgeplakt (met powertape). Tussen deze twee spelden komt een touwtje dat langer is dan de afstand tussen de spelden, zie figuur 2. Deze afstand wordt straks onze 'ellipsconstante' en is tevens de straal van de richtcirkel.
In de Wageningse Methode komt nog een manier voor die we ook in de les hebben uitgeprobeerd: via iso-afstandslijnen, zie figuur 3. Daarbij gebruik je eveneens het gegeven dat de som van afstanden van een punt op de ellips tot de brandpunten constant is (de ellipsconstante). Wie hierover meer wil lezen, kijkt op de site van de methode – de werkbladen zijn vrij toegankelijk en de boeken zijn voor een redelijke prijs aan te schaffen.

Lonneke Boels

Meer lezen:
www.jeaninedaems.nl/onderwijs/kegelsneden-vouwen/
www.wageningse-methode.nl/hulpmiddelen2/wp-content/uploads/Bovenbouw-VWO-6B-WerkbladenH8-Conflictlijnen.pdf

UITWERKING PUZZEL 91-3

GEHAKTE RIJEN [1]

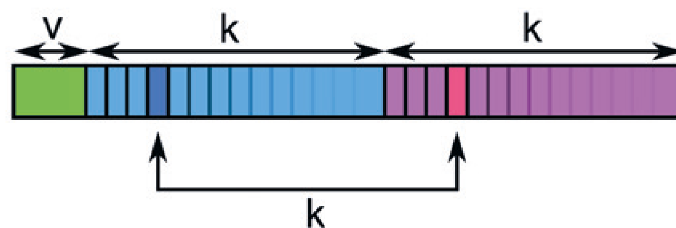


Wobien Doyer
Lieke de Rooij

Een rij van opeenvolgende natuurlijke getallen a ... b hakken we in twee delen zodanig dat de som van beide delen gelijk is. Bijvoorbeeld 1, 2 | 3. We moesten, uitgaande van het lengte verschil v tussen de twee delen bepalen welke rijen hakbaar zijn. Meerdere mensen stelden dat de lengte van die hakbare rijen dan gelijk is aan $v + 2k$. Het eerste deel begint met v termen, gevolgd door nog k termen. Het tweede deel heeft k termen. Algemeen blijkt te gelden:

Als de som van een rij van v termen een kwadraat is, zeg k^2, dan is de rij altijd hakbaar te maken door er nog twee keer k termen achter te plakken. De hak is dan na $v + k$ termen.

Harm Bakker toonde dat aan zonder de som van de delen uit te hoeven rekenen. Het verschil tussen de som van de k termen in het tweede deel en de k termen in het eerste deel is $k \times k = k^2$ (zie figuur 1). Om te zorgen dat geldt: *Som*(deel 1) = *Som*(deel 2), moet de som van de eerste v termen dus k^2 zijn. Als $v = 1$ volgt dan onmiddellijk dat de eerste term $a = k^2$. Voor $k = 3$ bijvoorbeeld: **9**, 10, 11, 12 | 13, 14, 15. Voor $v = 2$ kunnen we beginnen met 4 + 5 = 9 en krijgen we de hakbare rij **4**, **5**, 6, 7, 8 | 9, 10, 11. En algemeen start zo'n rij met $v = 2$ met $a = (k^2 - 1)/2$ voor elke oneven k. Daarmee zijn de eerste twee vragen beantwoord: geef specifieke voorbeelden **(opgave 1)** en een algemene methode **(opgave 2)** voor $v = 1$ en een zelf te kiezen $v > 1$.



figuur 1

Een rij met eerste term a en $v + 2k$ termen is dus dan en alleen dan hakbaar als de som van de eerste v termen ($= (2a + v - 1) \times (v/2)$) gelijk is aan k^2. Daaruit volgt: $a = \frac{k^2}{v} - \frac{v-1}{2}$ en dat moet een heel getal zijn.
In **opgave 3** keken we naar het verschijnsel dat hakbare rijen met lengteverschil v netjes blijken aan te sluiten op een volgende hakbare rij met dezelfde v.

Bewijs: voor een hakbare rij met lengte $v + 2k$ geldt: beginterm $a = \frac{k^2}{v} - \frac{v-1}{2}$. Voor het gehele getal A dat aansluit op deze rij geldt: $A = a + v + 2k$. Dat is te herleiden tot $A = \frac{(v+k)^2}{v} - \frac{v-1}{2}$. Dan is A weer het begingetal van een hakbare rij met dezelfde v en lengte $v + 2(k + v) = 3v + 2k$, met de som van de eerste v termen $= (v + k)^2$.

Hoewel het geen vraag was hebben meerdere inzenders zich gebogen over de opmerking dat niet alle waarden van v mogelijk zijn. Uit de formule voor a kunnen we opmaken: v moet ofwel oneven zijn ofwel een oneven aantal factoren 2 bevatten.

We gebruikten de term dubbelhakbare rijen voor rijen van opvolgende natuurlijke getallen die in drie stukken te hakken zijn, met sommen s, s, S, met $S = 2s$.

In **opgave 4** vroegen we om daarvan een voorbeeld te geven en een formule waarmee een oneindige rij van dubbelhakbare rijen gegenereerd kan worden. De meeste inzenders pakten dit probleem inductief aan. Ze zochten enkele voorbeelden en ontdekten toen een zekere regelmaat. Er geldt steeds: de eerste twee delen vormen een hakbare rij met $k = 2v$ en v oneven en het derde deel is even lang als het eerste. Vervolgens werd die regelmaat gecontroleerd met een ander voorbeeld en ook nog bewezen. Voorbeelden zijn: 4, 5, 6 | 7, 8 | 9, 10, 11 (met sommen 15, 15, 30) en 11, 12, ... , 19 | 20, 21, ... , 25 | 26, 27, ... , 34 (met sommen 135, 135, 270).
Een genererende formule voor deze rijen is: kies een natuurlijk getal t: $v = 2t - 1$, $k = 2v$, en daaruit volgt begingetal $a = 7t - 3$. Enig rekenwerk laat zien dat dit inderdaad voor elke $t > 0$ (dus voor elke oneven v) een dubbelhakbare rij oplevert, met *Lengte*(deel 1) = $3v$, *Lengte*(deel 2) = $2v$ en *Lengte*(deel 3) = weer $3v$; $s = 15v^2$.
Ten slotte: Meerdere inzenders deden een poging om aannemelijk te maken dat we hiermee alle dubbel hakbare rijen te pakken hebben, maar dat blijft helaas bij een vermoeden.

[1] **Deze titel is bedacht door H. Bakker.**

LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na puzzel 91-3 is:

Naam	Punten	Naam	Punten
F. Göbel	191	H. Klein	143
H. Bakker	179	L. Pos	116
J. Meerhof	177	H. Linders	111
K. Vugs	171	A. Gruneveld	66
J. Verbakel	168	L. Cizkova	61

We feliciteren Frits Göbel van harte met de ladderprijs.

ADV TEXAS

BOEKBESPREKING

MOIRÉ-KUNST MET NIVEAULIJNEN



Ernst Lambeck



Auteur: Luc van den Broeck
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2013)
Zebrareeks, deel 37
ISBN: 978-90-5041-138-7
Prijs: € 10,00 (72 pagina's; paperback)

Moiré-patroon

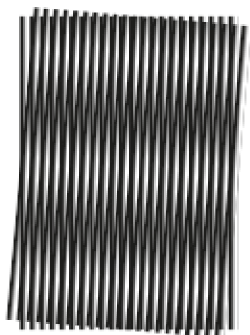
Neem een collectie evenwijdige lijnstukken en leg daar een ietwat gedraaide kopie van de collectie bovenop. Er ontstaat een patroon van licht en donker, een Moiré-patroon, zie figuur 1. Een bewegende kleurenversie van dit patroon is ook leuk om te zien: u kunt deze vinden op *https://en.wikipedia.org/wiki/Moiré_pattern*.

Figuur 2 laat zien waarom dit patroon ontstaat: de lijnen snijden onder een kleine hoek, waardoor ze rond het snijpunt enige tijd vrijwel samenvallen en er zones ontstaan met een zwakke lijnendichtheid.

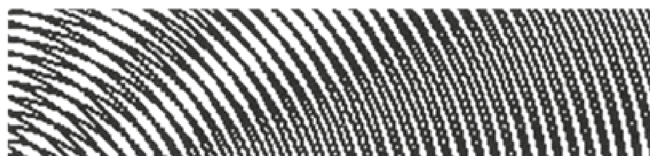
Ook in figuur 3 zien we een Moiré-patroon. Deze is gemaakt door zwarte niveaulijnen $1/3x^3 + 2xy^2 = a \cdot 0{,}005$ te nemen voor a = 0; ±1; ±2; enzovoort, en vervolgens een kopie (voor de duidelijkheid paars gemaakt) over 0,04 naar rechts te verschuiven. De lichte lijnen liggen dan op de krommen met vergelijkingen

$1/3x^3 + 2xy^2 = 1/3\cdot(x - 0{,}04)^3 + 2(x - 0{,}04)y^2 + n \cdot 0{,}005$

met n geheel.



figuur 1



figuur 2

Gewenste Moiré-krommen

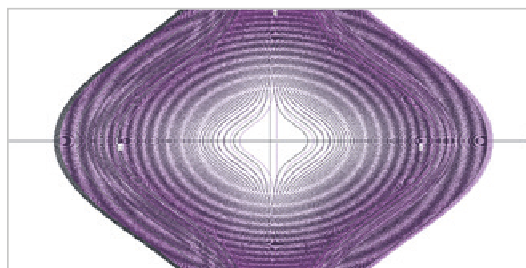
Die laatste vergelijkingen zijn te herleiden tot $x^2 + 2y^2 = c$, de Moiré-krommen zijn in dit geval dus ellipsen.

Je kunt die vergelijkingen ook herschrijven als

$$\frac{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}(x - 0{,}04)^3 + 2xy^2 - 2(x - 0{,}04)y^2}{0{,}04} = n \cdot 0{,}125$$

Het linkerlid herkennen we als een differentiaalquotiënt, het is bij benadering gelijk aan de partiële afgeleide

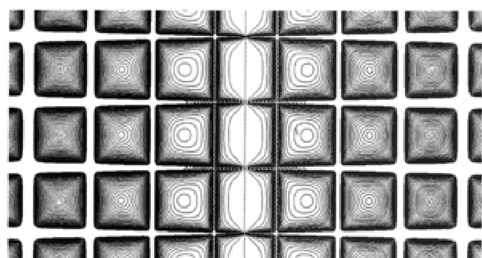
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{3}x^3 + 2xy^2\right) = x^2 + 2y^2$. Ook zó zien we dat de Moiré-krommen ellipsen zijn, maar deze observatie biedt nog een ander perspectief. Als we bepaalde patronen als Moiré-krommen willen krijgen, dan lukt dat door vergelijkingen van deze patronen te integreren. Het patroon van figuur 3 heb ik dan ook gemaakt door te beginnen met de vergelijkingen $x^2 + 2y^2 = c$ en het linkerlid te integreren naar de variabele x. Dit leverde de functie $f(x,y) = 1/3x^3 + 2xy^2$, waarvan de niveaulijnen de basis vormden voor mijn Moiré-patroon.



figuur 3

Inhoud

Het voorgaande is een voorbeeld van de inhoud van het tweede gedeelte van het Zebraboekje van Luc van den Broeck. In hoofdstuk 5 staat het verschuiven van een niveaulijnenkaart centraal, in hoofdstuk 6 draait het om het benaderen met partiële afgeleiden en in hoofdstuk 7 wordt de omgekeerde weg gevolgd. In de eerdere hoofdstukken komen functies van twee variabelen, hun grafieken en niveaulijnen aan de orde. Ook wordt nog kort aandacht besteed aan de link met *Op-art* (*optical art*)en kinetische kunst. Zie bijvoorbeeld figuur 4: *op-art* met de niveaulijnenkaart van $f(x,y) = x \cdot \sqrt{(\tan^2 x + \tan^2 y)}$.



figuur 4

Computerhulp

Het boekje geeft dus een mooie en verrassende (voor mij althans) toepassing van niveaulijnenkaarten. Het zelf tekenen van deze kaarten is misschien lastig, en zeker tijdrovend. Daarom wordt er gebruik gemaakt van het freewareprogramma *Winplot* (waarmee ook figuur 3 is gemaakt). In een appendix wordt kort uitgelegd hoe dit programma werkt. Twee andere appendices bieden een overzicht van vergelijkingen van kegelsneden en de antwoorden/uitwerkingen van alle opgaven uit het boekje. Voor het differentiëren en integreren van lastigere functies wordt ook computerhulp gebruikt in de vorm van de applet *WolframAlpha*. Hiervan is de uitleg beperkt tot het geven van een tweetal voorbeelden, een voor het differentiëren en een voor het integreren. Overigens is dat niet echt een probleem, mogelijk is de uitvoer dat wel een enkele keer.

Zo geeft *WolframAlpha* voor de partiële afgeleiden van

$\frac{x^2}{1+y^2}$ (opgave 20)

letterlijk $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1+y^2}\right) = \frac{2x\left(-xyy'(x) + y^2 + 1\right)}{(y^2+1)^2}$ en

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{1+y^2}\right) = \frac{-2x^2 y}{(y^2+1)^2}$, dus met verschillende *d*'s en met een y'. En bij het integreren naar de variabele x van de functie $f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{2\left(x^2-y^2\right)}$ is volgens het boekje $g(x,y) = y^3 \cdot \ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right) + \frac{1}{6}x\left(x^2 + 9y^2\right)$ het antwoord. *WolframAlpha* geeft echter

$\frac{1}{6}\left(x^3 - 12y^3 \tanh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + 9xy^2\right)$, hetgeen wel te herleiden is tot de genoemde $g(x,y)$, maar toch... Welke leerlingen kennen de functie tanh, laat staan diens inverse? Maar eigenlijk is dit het enige wat aan te merken valt op dit leuke boekje!

Over de recensent

Ernst Lambeck is docent wiskunde aan het Newmancollege te Breda, redacteur van *Euclides* en voorzitter van de opgavencommissie van W4Kangoeroe.
E-mailadres: *elambeck@newmancollege.nl*

UITDAGENDE PROBLEMEN

Jacques Jansen

TUTOR OP TU/E

Jacques Jansen is drie maanden tutor op de Technische Universiteit Eindhoven (TU/e) geweest en wil graag zijn ervaringen met u delen. Sterker nog, hij zou u willen stimuleren om dat tutorschap ook een keer te doen.

Op het terrein van de TU/e zijn prachtige ruimtelijke objecten te bewonderen, zie bijvoorbeeld figuur 1, 2 en 3. Je zou meteen meetkunde met de eerstejaars studenten willen gaan bedrijven. Maar dat krijgen ze niet, het gaat op de eerste plaats om het aanleren van technieken en vaardigheden. Bijvoorbeeld het bepalen van de afgeleide van de functie: $y = \dfrac{x^5\sqrt{3+x^6}}{(4+x^2)^3}$, opgave 16 van *Exercises* 2.4.[1] Probeert u het maar eens en let op uw concentratie- en doorzettingsvermogen.



figuur 1 *Objet Mathématique* Le Corbusier



figuur 2 *Turbulentie* Margot Zandstra



figuur 3 Zadelvlak

Wat doet een tutor?

Leiding geven aan studenten bij hun studie *Calculus* in de eerste maanden van hun studiejaar. Tutoren zijn meestal ouderejaarsstudenten die aan bepaalde eisen moeten voldoen. Voordat ze beginnen krijgen ze een cursus aangeboden en ook horen ook de ervaringen van hun voorgangers. In totaal zijn er 2300 studenten die *Calculus* volgen waaronder 1800 eerstejaars. Er zijn dus nogal wat tutoren nodig. Vandaar dat er ook een beroep wordt gedaan op begeleiders van buiten de universiteit.

Dit jaar zijn er acht externen, meestal wiskundedocenten van middelbare scholen. Je begeleidt een even aantal groepjes studenten. Een groep bestaat uit acht á tien studenten. Een student krijgt tijdens het eerste kwartiel elke week zes wiskundecolleges en een tutor-uur. In dat tutor-uur wordt *homework* besproken. De communicatie via *oncourse.tue.nl* gaat in het Engels. Als voorbeeld het programma voor de eerste acht weken van *Technische bedrijfskunde*:

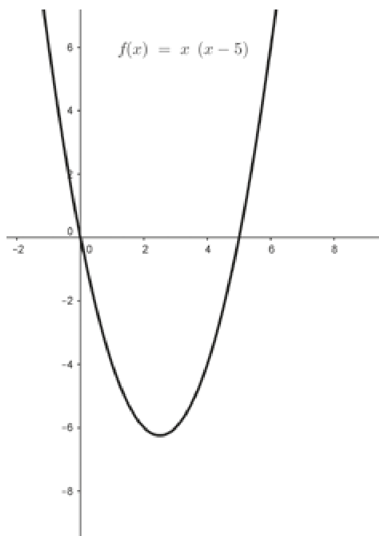
Week	We gaan het volgende doen
1	We start with equalities, inequalities, functions and more...
2	Trigonometric functions and vectors in space[2]
3	Limits, continuity and differentiation.
4	More on differentiation and inverse functions.
5	Exponential functions, logarithms and Taylor series.
6	Integration
7	More on integration and differential equations
8	No new theory will be covered, but we start preparing for the final exam.

In de eerste week is er meteen een entree-tentamen. Je wordt als student wreed wakker geschud uit je zomerslaap en je gaat bijvoorbeeld wat gonio-formules ophalen. Na vier weken is er een mid-tentamen van een uur. Je kunt dan vaststellen hoe de vlag erbij hangt. Begin november volgt een afsluitend tentamen van drie uur. Als tutor kom je bij de opgaven natuurlijk didactische problemen tegen. We gaan er een paar bekijken.

Grepen uit het *homework*
Opgave 40 uit het boek *Calculus*. Exercises 2.4 Een complexe opgave:

Show that the derivative of $f(x) = (x - a)^m(x - b)^n$ vanishes at some point between a and b if m and n are positive integers.

Veel studenten begrepen deze vraag niet. Wat moet je doen? Hoe begin ik? Het Engels blijkt hier een hindernis te vormen. Wat betekent *vanishes*? 'Probeer eens een beeld te krijgen van een grafiek van een lid van de familie van functies en kijk dan wat hierbij de vraag is. m en n



figuur 4 $m = n = 1$, $a = 0$, $b = 5$

zijn positieve getallen, dus houdt het eenvoudig en neem $m = n = 1$. En neem $a = 0$ en $b = 5$.' Zie figuur 4. 'Maar dat is toch geen bewijs voor dat specifieke geval', roept een student. We moeten dus op zoek naar een punt van de grafiek waarvan de x-coördinaat tussen a en b ligt met helling 0. Voor het gemak kiezen we $a < b$. Verdwijnen betekent dus een helling van nul krijgen. Na de verkenning en nadat de vraag begrepen is kunnen we de vaardigheden van het differentiëren er op loslaten.

- $f'(x) = m(x-a)^{m-1}(x-b)^n + n(x-a)^m(x-b)^{n-1}$;
- los op $f'(x) = 0$;
- $(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}(m(x-b) + n(x-a)) = 0$;
- het gaat nu alleen om de oplossing tussen a en b: $(m(x-b) + n(x-a)) = 0$
- $x = \dfrac{mb+na}{m+n}$

Nu komt de kernvraag waar bijna niemand aan denkt: hoe weet je nu dat het getal $\dfrac{mb+na}{m+n}$ echt tussen a en b ligt? Hoe herkennen we dat? Als a en b cijfers zijn voor wiskunde dan is het gemiddelde van a en b een voor de hand liggend getal tussen a en b: $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}b$, dit vind je in figuur 4 met $f(x) = (x-0)(x-5)$.
Misschien telt het cijfer a twee keer zo zwaar als cijfer b. We hebben dan een gewogen gemiddelde dus

$\dfrac{a+a+b}{3} = \dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b$, zie figuur 5, $f(x) = (x-0)(x-5)^2$.

Bij de studenten begint het te dagen dat de coëfficiënten van a en b samen 1 moeten zijn. Dan komt de volgende stap vanzelf:

$\dfrac{mb+na}{m+n} = \dfrac{n}{m+n}\cdot a + \dfrac{m}{m+n}\cdot b$. En er geldt dus:

$\dfrac{n}{m+n} + \dfrac{m}{m+n} = \dfrac{m+n}{m+n} = 1$.

Abstractie

Dat viel tegen bij opgave 24. Exercises pagina 6 uit *Calculus*:

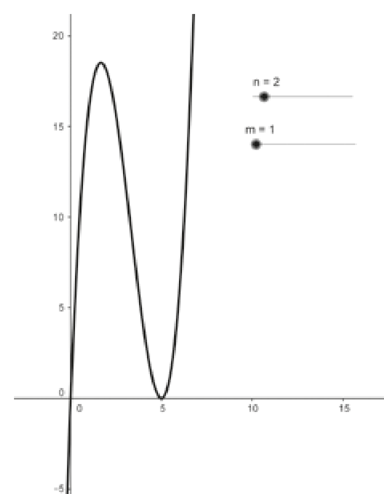
What condition should the coefficients of a polynomial satisfy to ensure that $x + 1$ is a factor of that polynomial?

De studenten kennen de polynoomvorm: $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ waarbij $n > 0$ en $a_n \neq 0$. Ze hebben nog niet de houding om naar simpele polynoomvormen te kijken waarbij $x + 1$ een factor is zoals $(x + 1)(x - 5) = x^2 - 4x - 5 = 1 \cdot x^2 + -4 \cdot x + -5$. Na invulling van $x = -1$, op dat idee moet je wel komen, gaat dat opleveren $(-1)^2 - 4(-1) - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$. Aan het product kon je al zien dat dat 0 gaat opleveren. En nu maar kijken naar de coëfficiënten van de drieterm. Valt er iets op? Terug naar de algemene polynoomvorm. De gezochte voorwaarde gaat worden $a_n(-1)^n + a_{n-1}(-1)^{n-1} + \ldots + a_2(-1)^2 + a_1(-1) + a_0 = 0$. Van deze uitdrukking raken de studenten niet opgewonden. Het zegt hun niet veel. Het krijgt voor hun meer betekenis door te veronderstellen dat n even is en dat je dan krijgt:
$a_n - a_{n-1} + \ldots a_2 - a_1 + a_0 = 0$. Bij n is oneven $-a_n + a_{n-1} - \ldots a_2 - a_1 + a_0 = 0$. Ze vinden het maar een rare opgave.

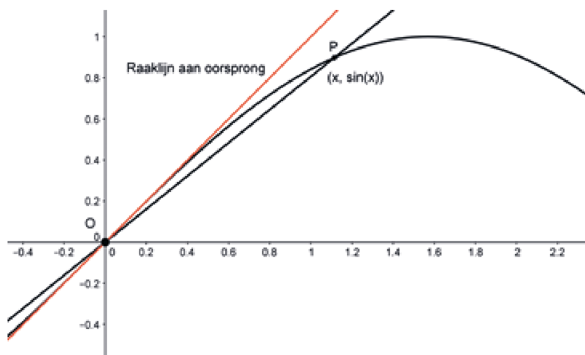
Afsluitend tentamen

In de zevende week krijgen de studenten differentiaalvergelijkingen. De tentamenmakers waren met dit onderwerp heel voorzichtig. Het kwam pas aan de orde bij de laatste opgave van het tentamen, opgave 10:

Los de volgende differentiaalvergelijking op met de gegeven beginvoorwaarde: $x\dfrac{dy}{dx} + y = xe^{x^2+1}$ en $y(1) = 0$. In het boek hebben ze verschillende technieken geleerd om deze lineaire inhomogene DV op te lossen.



figuur 5 $m = 1$, $n = 2$, $a = 0$, $b=5$



figuur 6

De studenten vergeten om eerst eens goed te kijken naar de vergelijking. Je zou het linkerlid als resultaat kunnen zien van het toepassen van de productregel op $x \cdot y$: $(x \cdot y)' = x \cdot y' + 1 \cdot y = xe^{x^2+1}$. Goed kijken dus: afgeleide van $x \cdot y$ is gelijk aan een zekere functie van x. De primitieven zijn, op een constante C na, aan elkaar gelijk. De primitieve van die zekere functie ligt voor het oprapen. Die x is bijna de afgeleide van de exponent van die e-macht.
$x \cdot y = 0,5e^{x^2+1} + C$. Beginvoorwaarde $y(1) = 0$

levert op: $C = -\frac{1}{2}e^2$.

We vinden: $y = \frac{e^{x^2+1} - e^2}{2x}$. Bij de uitwerkingen in de

tentamens van de studenten vind ik deze aanpak niet terug maar wel ellenlange berekeningen.

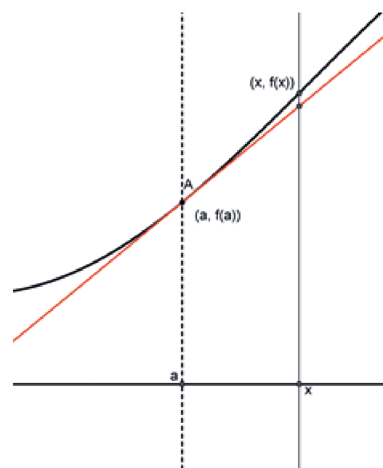
Bevindingen van deze aansluitingscursus

- wiskunde D-leerlingen hebben echt voordeel. Dit geldt bijvoorbeeld voor onderwerpen als vectormeetkunde en limietberekening;
- het gaat niet alleen om herhaling van de analyse van het vwo maar ook om verdieping en uitbreiding van de analyse. Bijvoorbeeld de middelwaardestelling, Taylorreeksen en inversen van de bekende goniometrische functies;
- leerlingen hebben geen beeld van wiskundige expressies zoals $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Ze denken niet aan de sinusgrafiek waarbij de aandacht moet liggen bij de helling in de oorsprong. Het helpt ook niet als ik het quotiënt anders schrijf: $\frac{\sin(x) - 0}{x-0}$. Het beeld van een raaklijn door de oorsprong van een sinusgrafiek ontbreekt, zie figuur 6;
- hetzelfde overkomt mij bij benaderingen van een functie f voor $x = a$. De formule voor P_n, Taylorpolynoom van de n-de orde staat op het examenblad. Voor de studenten is het wat invullen zonder beeldvorming. Kies $n = 1$ en je hebt de eenvoudigste, lineaire benadering: $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. U herkent natuurlijk de formule van de raaklijn in punt $(a, f(a))$, zie figuur 7.

Als je zeventien studenten hebt begeleid kun je en mag je zeker niet generaliseren. Toch wil ik de volgende aanbevelingen doen.

Aanbevelingen

Schaf *Calculus* aan van Adams: de Bijbel van de analyse. Als je een tijdje gewerkt hebt in de bovenbouw van het vwo of havo, dan is het een leuke en zinvolle uitdaging om zo'n calculuscursus te begeleiden. Het kan niet anders dan dat u op ideeën komt voor uw bovenbouwonderwijs. Maar ook zullen uw testen en schoolonderzoeken er door geïnspireerd worden. Bovendien: u ziet de behoeftes van het vervolgonderwijs maar ook kunt u de eigenheid van het vwo of het havo versterken.



figuur 7

Tot slot

Mijn indruk is dat de TU/e de aansluiting heel goed heeft georganiseerd. Voor de studenten is er veel oefenmateriaal en de nodige begeleiding in de eerste maanden. Er worden drie verschillende cursussen wiskunde aangeboden waarbij de cursus voor technische bedrijfskunde een variant B is die ligt tussen de meest 'zachte' variant (bijvoorbeeld voor bouwkunde) en de formele variant. 62,9% van de studenten die variant B volgde is geslaagd.

Noten

[1] Adams A., & Essex C. (2013). *Calculus-eighth edition.* Pearson Canada, Toronto
[2] Dictaat *Vectoren in vlak en ruimte*. Faculteit Wiskunde en Informatica TU/e 2012-2015

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu. E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

ADV BETTERMARKS

VANUIT DE OUDE DOOS

Ton Lecluse

UITDAGING

In deze rubriek bespreekt Ton Lecluse opgaven die de vorige eeuw tot in de Tweede Wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Hij beperkt zich tot opgaven die, naar zijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Eventueel met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!



A° 1955

Deze keer een opgave uit 1955 die mooi past in het nieuwe VWO-programma, met een mooi dwarsverband tussen trigonometrie en goniometrie-formulewerk. Wellicht vindt u het leuk om de opgave eerst zelf te proberen. Misschien vindt u ze wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening. Verderop treft u mijn uitwerking aan.

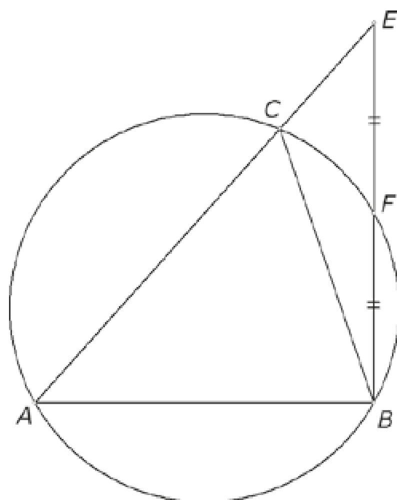
De opgave

Gegeven is een scherphoekige driehoek ABC en de omgeschreven cirkel daarvan.
De loodlijn, in B op AB opgericht, snijdt de cirkel voor de tweede maal in F en het verlengde van AC in E.

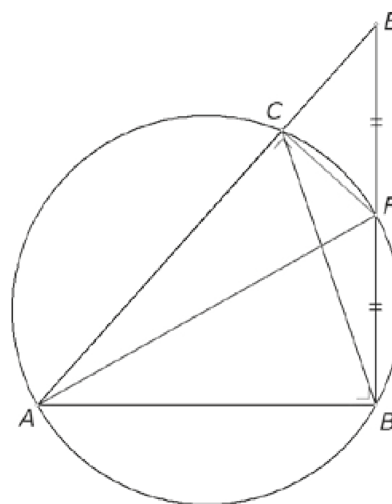
a. Als $EF = FB$, bewijs dan: $\cos\beta = \cos\alpha \cdot \cos\gamma$.
b. Leid uit deze betrekking grenzen af, tussen welke $\angle\beta$ genomen moet worden.
c. Bereken α (en γ) als bovendien gegeven is dat $\angle\beta = 74°20'$

Uitwerking

Eerst een tekening, zie figuur 1. Probeert u het nu eerst even zelf?



figuur 1



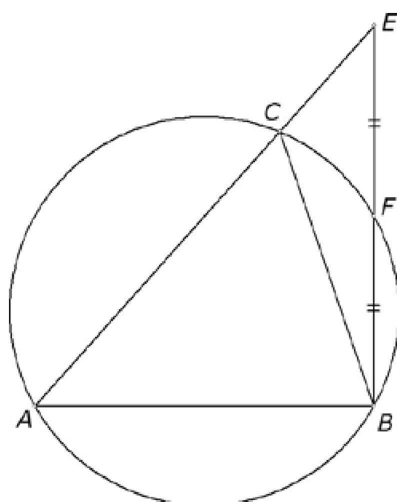
figuur 2

Enkele eerste tips bij **onderdeel a**:

- het zou handig zijn wanneer er *rechthoekige* driehoeken aanwezig zijn, waarin de hoeken α, β *en* γ terugkomen;
- ga aan de slag met synthetische meetkunde en zoek dit uit.

De eerste denkstappen, op zoek naar gelijke hoeken en rechte hoeken: vierhoek $ABFC$ is een koordenvierhoek, waarvan de overstaande hoeken samen 180° zijn. Omdat $\beta = 90°$, is dus ook $\angle ACF = 90°$, zie figuur 2. (Je kunt ook zeggen dat AF een middellijn van de cirkel is en dus ook $\angle ACF = 90°$ (De stelling van Thales en zijn omgekeerde).
Er zijn dus vier rechthoekige driehoeken aanwezig: ABF, ACF, ABE en FCE.

Ook zijn er gelijkvormige driehoeken aanwezig en omtrekshoeken. Welke hoeken zijn er nu uit te drukken in α, β *en* γ?
Probeert u het even?



figuur 3

Welnu, zie figuur 3:

- driehoek *ABE* en driehoek *FCE* zijn gelijkvormig (beide hebben ∠*E* en 90°, hh), dus ∠*CFE* = α;
- gelijke omtrekshoeken op boog *AB* geeft ∠*AFB* = γ;
- gelijke omtrekshoeken op boog *AC* geeft ∠*AFC* = β.

Stel nu dat *BF* = *FE* = 1, dan geldt:
(1)... in driehoek *ABF*: cosγ = *BF*/*AF* = 1/*AF*
(2)... in driehoek *CFE*: cosα = *CF*/*FE* = *CF*
(3)... in driehoek *AFC*: cosβ = *CF*/*AF* = *CF* · 1/*AF*
Vul in deze laatste regel (1) en (2) in, waaruit volgt:
cosβ = cosα · cosγ.

Dan nu **onderdeel b**. Zelf geprobeerd?
We weten al dat 0 < β < 90°. Maar dit kan worden aangescherpt. Ik deed het verder door eliminatie van γ, immers γ = 180° – α – β.
Invullen in de formule van opgave a, geeft:
cosβ = cosα · cos((180° – α) – β).

In deze uitdrukking kan β worden vrijgemaakt. Lukt het u?

Welnu, de somformule van cos(*u* – *v*) geeft:
cosβ = cosα · (cos(180° – α) · cosβ + sin(180° – α) · sinβ)
cosβ = cosα · (–cosα · cosβ + sinα · sinβ)
cosβ = $-\cos^2\alpha$ · cosβ + sinα · cosα · sinβ
Zodat (1 + $\cos^2\alpha$) · cosβ = sinα · cosα · sinβ

Dus sinβ/cosβ = tanβ = (1 + $\cos^2\alpha$)/(sinα · cosα) = *f*(α)

Aangezien tanβ stijgend is op ⟨0; 90°⟩, bepaalt het minimum van deze functie ook het minimum van β. U mag het minimum van deze functie met differentiëren gaan proberen. Ikzelf heb het met *Geocadabra* gedaan, zie figuur 4.
De minimale waarde van tanβ is dus (benaderd) gelijk aan 2,828, waaruit volgt: β_{min} ≈ 70,53°.
Onderdeel c is nu een inkopper, gewoon tan($74\frac{1}{3}$°) gelijk stellen aan de functie *f* hierboven.
Dit geeft α ≈ 34,89° of α ≈ 70,78°.

Uit bovenstaande opgave is een mooie gonio-opgave te destilleren voor 6 vwo wiskunde B: In een scherphoekige driehoek *ABC* geldt: cosβ = cosα · cosγ. Welke waarden kan β aannemen?

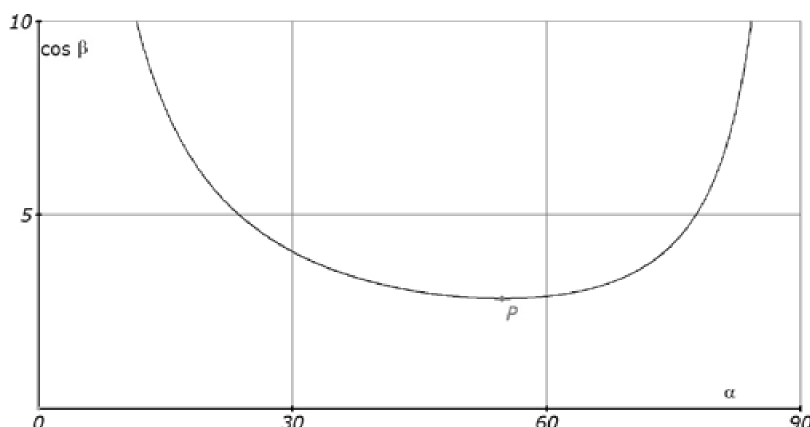
Bron

Stoelinga, Dr. Th. G.G., & van Tol, Dr. M.G. (Red.) (1958). *Wiskunde-Opgaven (van de toelating tot de Universiteiten van 1925 tot 1958)*. Uitg. Tjeenk Willink, achtste druk.

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

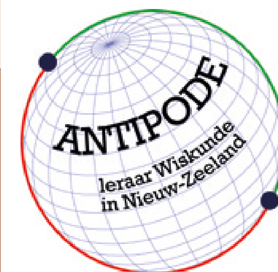
figuur 4



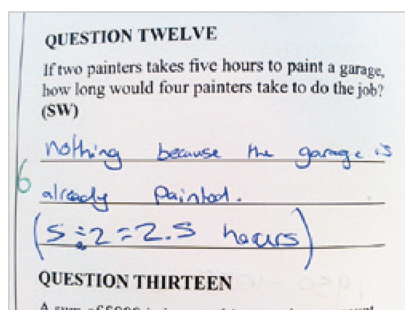
TEGENVOETER

TOETSEN IN DE ONDERBOUW

Roland Meijerink



Kia ora! Mijn naam is Roland Meijerink, ik ben 33 jaar en sinds eind januari docent wiskunde op Karamu High School in Hastings, Nieuw-Zeeland. Op deze plek ga ik u regelmatig op de hoogte houden van mijn belevenissen aan de andere kant van de wereld.



In Nieuw-Zeeland houdt men van toetsen. Zo doen leerlingen in de onderbouw en op de basisschool zogeheten *Progressive Achievement Tests* (PATs). Daarmee worden leerlingen ingedeeld in staninen[1] op het gebied van reken-, lees- en luistervaardigheid. Deze toetsen zijn niet verplicht, maar de meeste scholen doen ze aan het begin en/of einde van elk schooljaar. De resultaten van de basisschool worden onder meer gebruikt voor de klassenindeling in de brugklas. Daarbij worden leerlingen van vergelijkbaar niveau bij elkaar gezet.
Dan zijn er natuurlijk toetsen per vak. De vier kernvakken (Wiskunde, Engels, *Science* en *Social sciences*) hebben in de onderbouw elk jaar een eindtoets. Daarin komen álle onderwerpen van dat jaar nog eens aan bod. Verder zijn er gedurende het jaar ongeveer vijf toetsen per onderwerp, bijvoorbeeld meetkunde en algebra. Binnen de wiskundesectie op onze school hebben we een systeem waarbij we ook aan het begin van elk onderwerp een toets afnemen. Zo kunnen we per leerling en per klas een uitgebreide analyse doen van het startpunt (vooraf) en de vooruitgang (achteraf). De filosofie is dat de vooruitgang belangrijker is dan het absolute niveau. Mijns inziens een zinvolle benadering, omdat alle leerlingen in principe hetzelfde curriculum doen, maar het niveau binnen en tussen klassen erg varieert. Alle klassen doen doorgaans exact dezelfde toets, omdat de resultaten binnen een jaarlaag altijd te vergelijken moeten zijn. De indeling van de klassen voor volgend jaar wordt daar deels op gebaseerd. Dat zorgt er tot mijn spijt voor dat leerlingen in de klassen met een lager niveau regelmatig moeite hebben met het begrijpen van de vragen. Ook raken ze ontmoedigd door de vragen op het hogere niveau.

'DE FILOSOFIE IS DAT DE VOORUITGANG BELANGRIJKER IS DAN HET ABSOLUTE NIVEAU.'

De meeste toetsen in de onderbouw bestaan uit een flink aantal kleine opgaven, die grotendeels los staan van elkaar. Men lijkt zich er niet zo druk over te maken over als het antwoord op de ene vraag nodig is voor de andere. De vragen zijn (niet zichtbaar voor leerlingen) ingedeeld in drie niveaus: de meeste vragen zijn op het niveau waar de leerlingen in die klas eigenlijk op zouden moeten functioneren, de andere vragen op een niveau lager óf juist hoger. Aan de hand van een doordacht telsysteem wordt met het aantal juiste antwoorden bepaald op welk niveau een leerling zit. Ook wordt er een beoordeling voor het rapport aan gekoppeld: slecht, onvoldoende, voldoende, goed of zeer goed. Op het rapport maak je als docent ook een opmerking over de vooruitgang, dus het kan zijn dat een leerling allemaal 'onvoldoendes' heeft, maar dat ik zeer tevreden ben over de vooruitgang.
Daarnaast maken leerlingen bij de meeste onderwerpen nog een toets die ze mee naar huis mogen nemen en een paar lessen later in moeten leveren. Deze toets bestaat uit één grote en contextrijke opgave, waarbij de leesvaardigheid erg belangrijk is. Daarmee is de toets vergelijkbaar met de meeste schoolexamens in de bovenbouw. Daarbij wordt het niveau van de leerling bepaald aan de hand van de zogeheten SOLO-taxonomie.[2] Daarover de volgende keer meer.
Meer lezen? Ga naar *www.tegenvoeters.nl* of stuur een reactie naar *rmeijerink@karamu.school.nz.*

Noten

[1] *https://nl.wikipedia.org/wiki/Stanine*
[2] *www.johnbiggs.com.au/academic/solo-taxonomy/*

ADV MALMBERG

VAKANTIECURSUS 2015

Gert de Kleuver

DIT IS TRIVIAAL.

In augustus 2015 vond de vakantiecursus plaats in Amsterdam en Eindhoven. Het leek lange tijd triviaal dat Gert de Kleuver daar dan een verslag van doet. Maar dat is niet zo: dit is de laatste keer, opvolgers kunnen zich melden!



figuur 1 Ellipsograaf, gemaakt door leerlingen van het Sint Gregorius College in Utrecht

Vrijdag 21 augustus ging ik met enige scepsis naar Amsterdam. Wat moet je met zo'n thema? Krijgen we alleen maar bewijzen van stellingen of gaat het alleen maar over nog niet bewezen stellingen? Toch een dilemma!
Ook dit jaar mocht Prof. dr. Jan Wiegerinck namens de programmacommissie alle bezoekers hartelijk welkom heten, deze keer met enige uitleg van het woord triviaal. Is het alledaags of onbeduidend? Gelukkig weten we dat *triviaal* afgeleid is van *trivium*, dat in de middeleeuwen stond voor de drie basisvakken die het eerste deel van de universitaire opleiding besloegen. Dit wordt ook in de syllabus verder uitgewerkt. Maar ja, helemaal gerustgesteld was ik niet, ondanks de toezegging dat de vakantiecursus het bachelorniveau niet zal overschrijden.
Dat is wel triviaal in vergelijking met de vorige vakantiecursussen.

Net zoals in voorgaande jaren wil ik enkele lezingen kort bespreken zodat u geïnteresseerd bent om de syllabus te downloaden van de site of de presentaties van de sprekers op *www.platformwiskunde.nl* te bekijken. Liever heb ik nog dat u in 2016 de vakantiecursus komt bezoeken. Echt de moeite waard!

Een heel goede lezing waarin bovendien het genoemde materiaal op internet heel erg toegankelijk gemaakt is, was de lezing van Fokko-Jan Dijksterhuis. Hij nam ons mee naar de wereld van Frans van Schooten junior. Niet alleen in woorden maar we kregen ook enkele kopieën uit werken van Frans van Schooten zodat we konden meelezen. Frans van Schooten had een apparaat ontwikkeld waarmee een ellips getekend kon worden, zie figuur 1. Deze link geeft een voorbeeld van dit instrument waarover in de syllabus gesproken wordt:
www.fransvanschooten.nl/fvs_318.htm

Op de site *www.fransvanschooten.nl* staat een app waarmee je met *GeoGebra* ook kunt spelen. Er is op deze site veel lesmateriaal te vinden om te gebruiken in de klas.
Van Schooten verbaasde zich erover dat het tekenen van kegelsneden in het vlak nooit wiskundig behandeld was. De wiskundigen uit die tijd hielden zich aan de klassieke definitie van een kegel met een doorsnijding van een plat vlak. Om te concretiseren: de tuiniersellips, sla twee pinnen in de grond, leg er een dichtgeknoopt touw omheen, trek een kromme rondom de pinnen met de strakgetrokken lus. Van Schooten liet zien dat

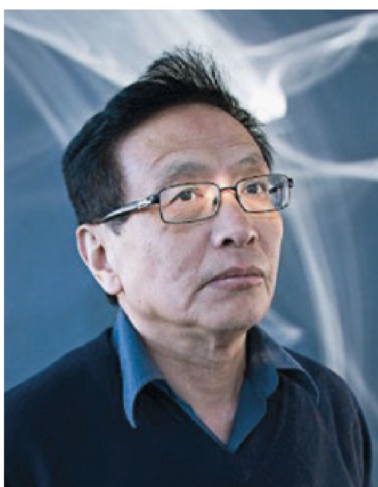


Eerste Bouck
der
MATHEMATISCHE
OEFFENINGEN,
Begrijpende
Vijftigh Arithmetische, en Vijftigh
Geometrische Voorstellen.
Door
FRANCISCUS van SCHOOTEN,
Professor Matheseos in de Universiteyt tot Leyden.

t'AMSTERDAM,
By GERRIT van GOEDESBERGH,
Boeck-verkooper op 't Water / in de Delfsche Bybel / tegen over de Nieuwe Brugh.
Anno 1659.

figuur 2 *Mathematische oeffeningen* anno 1659

deze kromme daadwerkelijk een ellips was die voldeed aan de eigenschappen die hiervoor waren afgeleid door Apollonius (circa 262-192 voor Chr.) Het ontwikkelen van apparaten werd door Van Schooten ter hand genomen, waar hij bovendien aantoonde dat de resultaten wiskundig correct waren. In de syllabus staan enkele afbeeldingen van de apparaten van Van Schooten met bijbehorende teksten. Een ander goed leesbaar boek dat via internet te lezen is, werd door Dijksterhuis als echte aanrader genoemd: *How to read Historical Mathematics* door Benjamin Wardhaugh. Het boek is vrijgegeven, u kunt het downloaden via de site. Jammer dat in de syllabus de illustraties niet wat groter afgebeeld zijn.



figuur 3 Yitang Zhang

Jan Brandts nam ons mee naar de fouten die rekenmachines maken en fouten die voorkomen in het programma *Matlab*. Enkele voorbeelden werden behandeld. Voor degenen onder ons die een rekenmachine helemaal niet zien zitten was dit een groot feest. Ja, $\sin(\pi)$ en dan in de zestiende decimaal fouten maken is misschien voor de één schokkend en voor de ander zal het iets oproepen in de trant van: ja, het zal wel.
Daarnaast nam Brandts ons mee in de wereld van computers en waarom een en ander plaatsvindt. Hij gaf duidelijk een verklaring voor de optredende fouten. Zeker het nalezen waard.

Een volgende spreker die ik graag onder de aandacht wil brengen is Frits Beukers. Een fantastische lezing over hoe je het 'priemgetaltweelingenvermoeden' bewijst. Ik kende het woord niet en weet eigenlijk ook niet of het wel een goed woord is in onze taal, daarom heb ik het tussen aanhalingstekens gezet. Het is wel een mooi woord, maar wat betekent het nu precies. Dat is prachtig door Beukers uitgelegd tijdens deze vakantiecursus. In de syllabus kun je het ook mooi en goed nalezen. Maar goed dan nu het vermoeden: (11,13); (17,19); (29,31); (41,43); (71,73); (101,103),... zijn opeenvolgende paren van oneven getallen waarvan beide elementen priem zijn. Ik heb me tijdens de presentatie wel afgevraagd waarom het paar (5,7) ontbreekt. In ieder geval werd daar niets over gemeld.
De vraag is of er oneindig veel van deze paren bestaan. Waarschijnlijk wel maar het is nog nooit aangetoond. Wel zijn er al heel grote priemgetaltweelingen gevonden. Hoe verder? In 2013 gaf de wiskundige Zhang aan dat er een getal A bestaat zodat er oneindig veel priemgetallen van de vorm n, $n + A$ zijn. Als A gelijk zou zijn aan 2, dan zou dit een bewijs van het priemgetallenvermoeden zijn. Zhang toonde aan dat $A < 70.000.000$.
Heden ten dage heeft onder andere Maynard al aangetoond dat $A < 246$. Het bewijs van Maynard blijkt heel toegankelijk te zijn, volgens Beukers, daar een bachelorstudent dit bewijs als onderwerp voor een bachelorscriptie heeft gebruikt.
Ook kwam aan de orde hoe je priemgetallen kunt tellen. Dit werd ook mooi uitgewerkt zodat de stap om de bewijzen van Zhang en Maynard te kunnen volgen inderdaad kleiner gemaakt werd. Hiervoor moet je de syllabus lezen vanaf pagina 73 tot en met 81. Een echte aanrader!

Deze keer heb ik drie lezingen kort in het voetlicht gezet. De andere lezingen waren zeker niet minder de moeite waard. De lezing van Peter Stevenhagen was ook boeiend. Ik heb een keuze moeten maken. Ik verwacht dat in 2016 velen naar de vakantiecursus komen, bovendien telt het ook nog mee voor het register.

Over de auteur

Gert de Kleuver is docent wiskunde op het Ichthus College te Veenendaal, daarnaast is hij penningmeester van de NvVW. E-mailadres: *penningmeester@nvvw.nl*

VASTGEROEST

Ab van der Roest

VREUGDEDANSJE

Ab van der Roest stoeit met zijn leerlingen met de regels voor product en quotiënt van machten. Resultaten uit het verleden zorgden voor een verwarde toekomst. Maar uiteindelijk ook tot nieuwe inzichten.

Maakt u ze wel eens in de klas, vreugdedansjes? Ik niet echt en soms heb ik daar spijt van. Donderdag had ik zo'n les in 4 vwo. Het is een wiskunde A-groep en de leerlingen moeten nog erg wennen aan het feit dat ze in de bovenbouw terecht zijn gekomen. Of misschien moet ik zeggen dat ze erg moeten wennen aan het feit dat ze les van mij hebben. Ik vind het maken van sommetjes erg belangrijk, maar huiswerk leg ik uit, is iets dat vooral thuis moet gebeuren. De les is ergens anders voor. De lesstof ging over het rekenen met exponenten en de volgende regels kwamen langs:

- $a^p \times a^q = a^{p+q}$
- $a^p : a^q = a^{p-q}$
- $(a^p)^q = a^{pq}$

De regels werden besproken en verklaard. Nader toegelicht met enkele voorbeelden. Kortom het gewone werk en de leerlingen deden goed mee. Ik had het idee dat ze goed begrepen waar ze mee bezig waren. Totdat ik de opgave $2^p \times 3^q = \ldots$ op het bord schreef. Hier werd flink over gesteggeld en het werd mij kwalijk genomen dat ik zei dat de som niet anders geschreven kon worden dan de opgave. Veel leerlingen, misschien allemaal wel, dachten dat er 6^{p+q} uit moest komen. Ze geloofden me niet dat dit antwoord fout was. Ik probeerde hen te overtuigen met een getallenvoorbeeld:
$2^5 \times 3^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 = 6^3 \times 4 \neq 6^8$.
Ze bleven volhouden dat de docent van de derde klas hen anders had verteld. Pas veel later begreep ik dat ze de opdracht verwarden met $5a \times 3b = 15ab$.
De exponenten zaten er toch minder goed in dan ik halverwege de les dacht. Daarom nog enkele opgaven bedacht: Is dit waar of nietwaar: $a^p \times b^p = (ab)^p$? Met een paar uitgeschreven voorbeelden besloten we dat het waar was. Uiteraard ook gewoon uitgeschreven met a en b; je ziet de koppels ab ontstaan.
Daarna nog de volgende vraag gesteld: $2^a + 2^a = 2^{a+1}$, is dit waar en zo ja, is $3^a + 3^a = 3^{a+1}$ dan ook waar. Moeilijke vragen waar niet zo gemakkelijk een antwoord op kwam. Probeer eens met getallen, is dan mijn advies. Toen bleek dat de tweede uitdrukking niet waar was, neem maar $3 + 3 \neq 9$. Dat de eerste uitdrukking wel waar was hebben we toen samen bewezen: $2^a + 2^a = 2 \times 2^a = 2^{a+1}$. Klaar denk je dan, maar niet helemaal, want meteen riep Hanna: voor 3^{a+1} heb je dus $3^a + 3^a + 3^a$ nodig. Tijd voor een vreugdedansje, maar ik deed het niet. Achteraf erg jammer...

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Marjanne Klom, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Swier Garst, Molenstraat 4, 3255 AN Oude Tonge
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 60,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2016

vr/za 5/2 6/2

vr/za 11/3 12/3

do 17/3

wo 23/3

vr 8/4

wo 20/4

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 91

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
6	10 mei 2016	7 maart 2016
7	28 juni 2016	2 mei 2016